

Лекция 5. Группы. Изоморфизм групп.
Симметрическая группа перестановок.
Подгруппы. Теорема Кэли.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.su>

Алгебраические структуры

Пусть S — произвольное множество.

Алгебраической операцией $*$ на множестве S называется отображение $*$: $S \times S \rightarrow S$.

Элемент $e \in S$ называется **нейтральным элементом** относительно операции $*$, если для каждого элемента $a \in S$ верно

$$a * e = e * a = a.$$

Теорема 1. *Нейтральный элемент (если он существует) единственен.*

Доказательство проведем от противного: пусть найдутся два нейтральных элемента $e' \in S$ и $e'' \in S$, $e' \neq e''$.

Тогда

$$e' = e' * e'' = e''$$



Алгебраические структуры

Для элемента $a \in S$ элемент $a' \in S$ называется **симметричным**, если

$$a * a' = a' * a = e,$$

где $e \in S$ — нейтральный элемент относительно операции $*$.

Теорема 2. *Симметричный элемент относительно ассоциативной операции (если он существует) единственен.*

Доказательство проведем от противного: пусть для некоторого элемента $a \in S$ найдутся два симметричных элемента $a' \in S$ и $a'' \in S$, $a' \neq a''$.

Тогда

$$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''$$



Группы

Множество S с одной или несколькими введенными на нем операциями называется *алгебраической структурой*.

Структура $G = (S; *)$ (т.е. множество S с введенной на нем алгебраической операцией $*$) называется **группой**, если

1) операция $*$ ассоциативна, т.е. для любых элементов $a, b, c \in S$ верно

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

2) существует нейтральный элемент относительно операции $*$, т.е. найдется такой элемент $e \in S$, что для каждого элемента $a \in S$ верно

$$a * e = e * a = a;$$

3) для каждого элемента $a \in S$ найдется симметричный к нему элемент $a' \in S$, т.е. такой что

$$a * a' = a' * a = e.$$

Группы

Если для группы $G = (S; *)$ дополнительно выполнено, что
4) операция $*$ коммутативна, т.е. для любых элементов $a, b \in S$
верно

$$a * b = b * a,$$

то такая группа называется **коммутативной**, или **абелевой**.

Группы

Теорема 3 (правило сокращения).

Пусть $G = (S; *)$ — группа. Тогда если для некоторых элементов $a, b, c \in G$ верно

$$a * b = a * c \text{ (или } b * a = c * a),$$

то $b = c$.

Доказательство. Пусть элемент $a' \in G$ симметричен относительно операции $*$ к элементу $a \in G$. Элемент $a' \in G$ найдется, т.к. G — группа. Тогда

$$\begin{aligned} a * b &= a * c \\ a' * a * b &= a' * a * c \\ b = e * b &= (a' * a) * b = (a' * a) * c = e * c = c \end{aligned}$$



Примеры групп

1. $S = \{e\}$; $e * e = e$ — тривиальная группа.

2. $S = \{e, a\}$; $x * e = e * x = x$, где $x = e, a$;

Чему равно $a * a = ?$

Пусть $a * a = a$? Тогда $a * a = a * e$, и $a = e$?! — противоречие.

Получаем $a * a = e$.

3. $S = \{e, a, b\}$;

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Перечисленные группы коммутативны.

Изоморфизм групп

Две группы $G = (S; *)$ и $G' = (S'; \times)$ называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение

$$\varphi : S \rightarrow S',$$

сохраняющее операцию, т.е. для любых элементов $a, b \in S$ верно

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

Перечисленные в п.п. 1–3 группы единственные с точностью до изоморфизма группы соответственно из одного, двух и трех элементов.

Порядок группы

Группа $G = (S; *)$ называется **конечной**, если в множестве S конечное число элементов.

Если группа $G = (S; *)$ конечна, то число элементов в множестве S называется ее **порядком** и обозначается $|G|$.

Пусть $G = (S; *)$ — группа с нейтральным элементом e .
Для элемента $a \in G$ наименьшее натуральное число n (если оно существует), такое что

$$\underbrace{a * a * \dots * a}_n = e,$$

называется его **порядком**.

Конечные коммутативные группы

Теорема 4. Пусть $G = (S; *)$ — конечная коммутативная группа, и $e \in S$ — ее нейтральный элемент. Тогда для любого элемента $a \in S$ верно $\underbrace{a * \cdots * a}_{|G|} = a^{|G|} = e$.

Доказательство. Пусть $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, и $a \in S$. Рассмотрим элементы группы

$$a * a_1, a * a_2, \dots, a * a_n.$$

Все эти элементы различны (**почему?**). И их ровно n . Значит, здесь перечислены все элементы группы.

Поэтому, с учетом коммутативности и ассоциативности операции $*$, получаем:

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n (a * a_i) = a^{|G|} \prod_{i=1}^n a_i.$$

По правилу сокращения (теорема 3) получаем $a^{|G|} = e$.



Малая теорема Ферма

Следствие 4.1 (малая теорема Ферма). *Если p — простое число, то для каждого натурального числа a , $1 \leq a \leq (p - 1)$, верно $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$.*

Доказательство. Пусть $S = \{1, 2, \dots, (p - 1)\}$ и $\cdot \pmod{p}$ — операция умножения по модулю p чисел из S .

Несложно проверить, что $G = (S, \cdot \pmod{p})$ — коммутативная группа порядка $(p - 1)$ с нейтральным элементом $e = 1$.

Поэтому, по теореме 4 получаем, что $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$ для каждого $a \in S$.



Терминология

Общая	Аддитивная	Мультипликативная
$*$ операция e нейтральный a' симметричный $\underbrace{a * a * \dots * a}_n$	$+$ сложение 0 ноль $-a$ противоположный na	\cdot умножение 1 единица a^{-1} обратный a^n степень

Перестановки

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \geq 1$.

Перестановкой (n элементов) π называется взаимно однозначное отображение

$$\pi : N \rightarrow N.$$

Множество всех перестановок n элементов обозначим как S_n .

Задавать перестановки можно

1) таблицей: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ — в каждом столбце элемент в первой строке перестановкой переводится в элемент во второй строке;

2) строкой: $\pi = [2143]$ — в строке на i -м месте стоит элемент $\pi(i)$;

3) произведением циклов: $\pi = (12)(34)$ — каждая скобка является отдельным циклом, в каждой скобке следующий элемент получен из предыдущего применением перестановки, первый элемент получен из последнего применением перестановки.

Перестановки

Длиной цикла перестановки называется число элементов в нем.

Типом перестановки $\pi \in S_n$ называется набор

$$\lambda(\pi) = (\lambda_1(\pi), \dots, \lambda_n(\pi)),$$

где $\lambda_i(\pi)$ — число циклов длины i в перестановке π .

Заметим, что для любой перестановки $\pi \in S_n$ верно

$\sum_{i=1}^n i \cdot \lambda_i(\pi) = n$, т.к. каждый элемент принадлежит ровно одному циклу.

Например, для перестановки $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ее тип

$\lambda(\pi) = (0, 2, 0, 0)$, т.е. в ней два цикла, каждый из которых содержит по два элемента.

Перестановки

Введем операцию **композиции** \circ на множестве перестановок. **Композицией** (или **произведением**) перестановок π и ρ называется такая перестановка $\pi \circ \rho$, что для любого элемента $x \in N$ верно

$$(\pi \circ \rho)(x) = \pi(\rho(x)).$$

Перестановки

Теорема 5. При $n \geq 3$ операция композиции перестановок n элементов не является коммутативной.

Доказательство. Рассмотрим перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ и } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(\pi \circ \rho)(1) = 1,$$

а

$$(\rho \circ \pi)(1) = 3.$$



Группа перестановок

Теорема 6. *Множество перестановок n элементов S_n с операцией композиции \circ является группой.*

Доказательство. Проверим свойства группы.

1) Ассоциативность операции \circ .

Пусть $\pi, \rho, \tau \in S_n$. Тогда для любого элемента $x \in N$

$$((\pi \circ \rho) \circ \tau)(x) = (\pi \circ \rho)(\tau(x)) = \pi(\rho(\tau(x)))$$

и

$$(\pi \circ (\rho \circ \tau))(x) = \pi((\rho \circ \tau)(x)) = \pi(\rho(\tau(x))).$$

Группа перестановок

Доказательство.

2) Существование нейтрального элемента e .

Нейтральным элементом является перестановка

$$\pi_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

оставляющая каждый элемент на месте.

3) Для каждого элемента π существование симметричного элемента π' .

Для перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

обратным (симметричным) элементом является перестановка

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(n) \\ 1 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Группа перестановок

Доказательство.

Следовательно, (S_n, \circ) — группа.

По теореме 5 при $n \geq 3$ эта группа не коммутативна.



Группа всех перестановок n элементов с операцией композиции \circ называется **симметрической группой перестановок** и обозначается как S_n .

Теорема 7. *Порядок симметрической группы перестановок S_n равен $n!$, т.е.*

$$|S_n| = n!$$

Группа S_3

Рассмотрим симметрическую группу перестановок S_3 .

$\pi_1 = e = [123] = (1)(2)(3)$ — нейтральный элемент (единица группы);

$\pi_2 = [132] = (1)(23)$ — элемент 1 остается на месте, элементы 2 и 3 меняются местами;

$\pi_3 = [321] = (13)(2)$ — элемент 2 остается на месте, элементы 1 и 3 меняются местами;

$\pi_4 = [213] = (12)(3)$ — элемент 3 остается на месте, элементы 1 и 2 меняются местами;

$\pi_5 = [231] = (123)$ — элементы 1, 2 и 3 сдвигаются по циклу по часовой стрелке;

$\pi_6 = [312] = (132)$ — элементы 1, 2 и 3 сдвигаются по циклу против часовой стрелки.

Порядок группы $|S_3| = 3! = 6$.

Подгруппы

Пусть $G = (S; *)$ — группа, и $T \subseteq S$.

Если $H = (T; *)$ является группой, то она называется **подгруппой** группы $G = (S; *)$.

Если при этом $T \neq \{e\}$ и $T \neq S$, то подгруппа называется **собственной**.

Подгруппы

Теорема 8. Пусть $G = (S; *)$ — группа, и $T \subseteq S$.
 $H = (T; *)$ является группой тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in T$ верно, что $a * b' \in T$.

Доказательство.

\Leftarrow . Проверим свойства группы.

- 1) ассоциативность операции $*$: т.к. G — группа;
 - 2) существование нейтрального элемента e : если $a \in T$, то $a * a' = e \in T$;
 - 3) для каждого элемента существование симметричного элемента: если $a \in T$, то $e * a' = a' \in T$;
- алгебраичность операции $*$ для множества T : если $a, b \in T$, то по п. 3) $b' \in T$, и $a * (b')' = a * b \in T$.



Подгруппы

Примеры подгрупп в группах.

1. Если $G = (S, \cdot)$ — мультипликативная группа, и $a \in G$ — элемент порядка n в ней, то множество

$$T = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n = 1\}$$

с операцией \cdot образует мультипликативную подгруппу $H = (T; \cdot)$ порядка n группы $G = (S; \cdot)$.

Мультипликативная группа называется **циклической**, если каждый из ее элементов является некоторой степенью выделенного элемента группы, который называется **образующим** элементом группы.

Группа с образующим элементом a обозначается как $\langle a \rangle$.

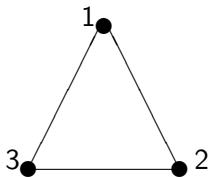
Группа $H = (T; \cdot)$ из п. 1 является циклической подгруппой группы $G = (S; \cdot)$ с образующим элементом $a \in T$, т.е.

$H = \langle a \rangle$.

Подгруппы

2. Найдем группу H перестановок вершин правильного треугольника при его вращениях в плоскости, переводящих его в себя.

Рассмотрим правильный треугольник и будем поворачивать его по часовой стрелке:



поворот на угол 0 : $\pi_1 = e = (1)(2)(3)$;

поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$: $\pi_2 = (123)$;

поворот на угол $\frac{4\pi}{3}$: $\pi_3 = (132)$.

Подгруппы

Получаем группу вращений вершин правильного треугольника в плоскости $H = (\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}; \circ)$, $|H| = 3$.

Она является подгруппой симметрической группы перестановок S_3 .

Теорема Кэли

Теорема 9 (Кэли). *Каждая конечная группа изоморфна некоторой подходящей подгруппе симметрической группы перестановок S_n .*

Доказательство. Пусть $G = (S; *)$ — заданная конечная группа, $|G| = n$, и $S = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$.

Для каждого элемента $g_i \in G$ построим соответствующую ему перестановку $\pi_{g_i} \in S_n$ по правилу

$$\pi_{g_i} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_i * g_1 & g_i * g_2 & \dots & g_i * g_n \end{pmatrix},$$

или

$$\pi_{g_i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_{g_i}(1) & \pi_{g_i}(2) & \dots & \pi_{g_i}(n) \end{pmatrix},$$

где $\pi_{g_i}(j) = k$, если $g_i * g_j = g_k$.

Теорема Кэли

Доказательство.

1. Сначала покажем, что такое определение задает перестановки.

От противного: пусть это не так, т.е. для некоторого $g_i \in G$ найдутся такие элементы $g_j \in G$ и $g_l \in G$, $g_j \neq g_l$, что

$$g_i * g_j = g_i * g_l.$$

Но тогда по правилу сокращения (теорема 3) верно $g_j = g_l$ — противоречие.

Обозначим полученное множество перестановок как T , $T \subseteq S_n$.

Теорема Кэли

Доказательство. 2. Теперь по теореме 8 покажем, что построенное множество перестановок с операцией композиции образует подгруппу симметрической группы перестановок S_n . Выделим любые элементы $g_i, g_j \in G$ и рассмотрим перестановку $\pi_{g_i} \circ \pi_{g_j}^{-1}$.

Т.к. G — группа, верно $g_j' \in G$.

Тогда для любого элемента $x \in N$ получаем

$$(\pi_{g_i} \circ \pi_{g_j}^{-1})(x) = (\pi_{g_i} \circ \pi_{g_j'})(x) = \pi_{g_i}(\pi_{g_j'}(x)) = \pi_{g_i * g_j'}(x).$$

Т.к. G — группа, верно $g_i * g_j' = g_k \in G$, откуда $\pi_{g_i * g_j'} = \pi_{g_k}$.
Значит, $\pi_{g_i} \circ \pi_{g_j}^{-1} \in T$.

Следовательно, $H = (T; \circ)$ — подгруппа группы S_n .

Теорема Кэли

Доказательство. 3. Теперь покажем, что группы $G = (S; *)$ и $H = (T; \circ)$ — изоморфны.

Рассмотрим отображение

$$\varphi : S \rightarrow T, \quad g \mapsto \pi_g,$$

которое элемент $g \in S$ переводит в элемент $\varphi(g) = \pi_g \in T$.

1) Отображение φ взаимно однозначно.

2) Если $g_i, g_j \in G$, то

$$\varphi(g_i * g_j) = \pi_{g_i * g_j} = \pi_{g_i} \circ \pi_{g_j} = \varphi(g_i) \circ \varphi(g_j).$$

Т.е. отображение φ сохраняет операцию.

Значит, оно является изоморфизмом групп $G = (S; *)$ и $H = (T; \circ)$.



Теорема Кэли

Для конечной группы $G = (S; *)$ построенная в доказательстве изоморфная ей подгруппа $H = (T; \circ)$ называется **левым регулярным представлением Кэли**.

Найдем левое регулярное представление Кэли для группы из трех элементов из рассмотренного ранее примера

$$S = \{e, a, b\};$$

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

или

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Тогда

$$\pi_e = (1)(2)(3);$$

$$\pi_a = (123);$$

$$\pi_b = (132).$$

Получаем группу вращений H правильного треугольника в плоскости, являющуюся подгруппой группы S_3 .

Цикловой индекс

Пусть $G = (S; \circ)$ — подгруппа симметрической группы перестановок S_n .

Цикловым индексом группы перестановок G называется многочлен n переменных

$$Z_G(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} t_1^{\lambda_1(\pi)} \dots t_n^{\lambda_n(\pi)},$$

где $\lambda(\pi) = (\lambda_1(\pi), \dots, \lambda_n(\pi))$ — тип перестановки π .

Цикловой индекс

1. Найдем цикловой индекс группы H вращений правильного треугольника в плоскости.

Для каждой перестановки ищем ее тип:

$$\pi_1 = e = (1)(2)(3), \quad \lambda(\pi_1) = (3, 0, 0);$$

$$\pi_2 = (123), \quad \lambda(\pi_2) = (0, 0, 1);$$

$$\pi_3 = (132), \quad \lambda(\pi_3) = (0, 0, 1).$$

Замечая, что $|H| = 3$, получаем цикловой индекс

$$Z_H(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^3 + 2t_3).$$

Цикловой индекс

2. Найдем цикловой индекс симметрической группы перестановок S_3 .

Аналогично находим типы всех ее перестановок:

$$\pi_1 = e = (1)(2)(3), \quad \lambda(\pi_1) = (3, 0, 0);$$

$$\pi_2 = (1)(23), \quad \pi_3 = (13)(2), \quad \pi_4 = (12)(3),$$

$$\lambda(\pi_2) = \lambda(\pi_3) = \lambda(\pi_4) = (1, 1, 0);$$

$$\pi_5 = (123), \quad \pi_6 = (132), \quad \lambda(\pi_5) = \lambda(\pi_6) = (0, 0, 1).$$

Порядок группы $|S_3| = 3! = 6$.

Поэтому ее цикловой индекс

$$Z_{S_3}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6}(t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить цикловой индекс группы перестановок вершин правильного треугольника при его вращениях в пространстве.
2. Построить цикловой индекс группы перестановок вершин квадрата при его вращениях в плоскости.
3. Построить цикловой индекс группы перестановок вершин правильного тетраэдра при его вращениях в пространстве.
4. Найти левое регулярное представление Кэли группы $G = (S; *)$, где $S = \{0, 1, 2, 3\}$, операция $*$ — это $+(\text{mod } 4)$.

Литература к лекции

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988. Гл. 1, с. 12–23.

Конец лекции