# Лекция 6. Графы. Наследственные свойства графов. Оценка числа ребер в графах с наследственным свойством. Экстремальные графы. Наибольшее число ребер в планарных графах и графах без треугольников с заданным числом вершин.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Лекции по «Дискретным моделям».
Магистратура, 1-й курс,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

# Наследственное свойство графа

Свойство $P$ графов называется **наследственным**, если из его выполнения для графа $G$ следует его выполнение и для любого подграфа графа $G$.

# Оценка числа ребер

Обозначение: $P(n)$ — наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством $P$, содержащих $n$ вершин.

**Теорема 1**. *Если $P$ — наследственное свойство графов, то* $P(n) \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1)$, $n \geq 3$.

**Доказательство**.

Пусть $G = (V, E)$ — граф с наследственным свойством $P$, $|V| \geq 3$, и $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

# Оценка числа ребер

**Доказательство.**
Рассмотрим графы $G_i = G - v_i = (V_i, E_i)$: $V_i = V \setminus \{v_i\}$, $|E_i| = |E| - d_G(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Графы $G_i$ — также с наследственным свойством $P$, откуда

$$|E| - d_G(v_i) = |E_i| \leq P(n-1)$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Сложим все неравенства:

$$n \cdot |E| - \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \leq n \cdot P(n-1).$$

# Оценка числа ребер

**Доказательство.**

По формуле Эйлера для степеней вершин $\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2 \cdot |E|$, поэтому

$$|E| \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1).$$

Неравенство выполняется для любого графа с наследственным свойством $P$, а значит, и для графа $G = (V, E)$ с $|E| = P(n)$.

$\square$

# Планарный граф

Граф $G = (V, E)$ называется **планарным**, если его можно изобразить на плоскости следующим образом:
1) *вершинам* соответствуют *точки* плоскости, причем разным вершинам — разные точки;
2) *ребрам* соответствуют *линии*, соединяющие соответствующие пары вершин и не проходящие через другие вершины;
3) линиии, соответствующие разным ребрам, *не пересекаются* (за исключением концевых точек).

Такое изображение планарного графа называется его **укладкой** на плоскости.

Области плоскости, ограниченные ребрами и вершинами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область — **внешней гранью**.

# Формула Эйлера

**Теорема 2 (формула Эйлера для планарных графов).** *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с $p$ вершинами и $q$ ребрами, то для для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где $r$ — число граней в этой укладке.*

**Доказательство**: индукция по $q$ при заданном $p$.

*Базис индукции*: если $q = p - 1$, то $G$ — дерево.

Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

# Формула Эйлера

**Доказательство.**
*Индуктивный переход*: пусть в графе $G$ найдется $q \geq p$ ребер. Тогда в $G$ есть хотя бы один цикл, пусть $e$ — ребро из какого-то его цикла.
Граф $G' = G - e$ — связный и планарный с $p$ вершинами и $(q-1)$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $(r-1)$ граней.
Для графа $G'$ верно предположение индукции, т.е. $p - (q-1) + (r-1) = 2$, откуда $p - q + r = 2$. □

# Планарные графы

Планарность графов — наследственное свойство.

# Число ребер в планарных графах

**Теорема 3**. *Наибольшее число ребер в планарном графе с $p$, $p \geq 3$, вершинами равно $3p - 6$.*

**Доказательство**. Можно рассматривать связные графы.

1. Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с $p$ вершинами и $q$ ребрами.

Рассмотрим укладку $G$ на плоскости, и пусть $q_i$ — число ребер при обходе границы $i$-й грани в этой укладке, $i = 1, \ldots, r$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т.к. каждое ребро $e \in E$ считается ровно два раза: либо оно разделяет две различные грани, либо оно считается дважды при обходе границы некоторой грани.

Наименьшее число ребер в цикле равно трем, поэтому $3r \leq 2q$, или $r \leq \frac{2}{3}q$.

По формуле Эйлера $r = q - p + 2$, откуда $q \leq 3p - 6$.

# Число ребер в планарных графах

**Доказательство.**
2. Построим графы, на которых достигается эта оценка.
Если $p = 3$, то $G_p = K_3$.
Пусть уже построен связный планарный граф $G_p$ с $p$ вершинами и $3p - 6$ ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником.
Тогда граф $G_{p+1}$ получается из $G_p$ добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами границы этой грани. □

# Число граней в планарных графах

**Следствие 3.1**. *Наибольшее число граней в укладке планарного графа с* $p$, $p \geq 3$, *вершинами равно* $2p - 4$.

# Графы без полных подграфов $K_n$

Отсутствие в графах подграфа $K_n$ — наследственное свойство.

Обозначение: $ex(p, K_n)$ — наибольшее число ребер в графах с $p$ вершинами, не содержащих подграф $K_n$.

# Число ребер в графах без треугольников

**Теорема 4**. *Справедливо равенство* $ex(p, K_3) = \lfloor p^2/4 \rfloor$, $p \geq 1$.
**Доказательство** верхней оценки: индукция по числу вершин $p$.
1. Сначала рассмотрим случай четного $p$.
*Базис индукции* $p = 2$ верен.
*Индуктивный переход*: пусть утверждение верно для всех графов с $p = 2s$ вершинами.
Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $(p + 2)$ вершинами.
Выберем в графе $G$ *две смежные* вершины $w_1, w_2 \in V$ и рассмотрим граф $G' = G - \{w_1, w_2\}$.
Граф $G' = (V', E')$ не содержит треугольников и для него верно предположение индукции, т.е. $|E'| \leq s^2$.
Тогда

$$|E| \leq s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1,$$

где единица в сумме соответствует ребру $(w_1, w_2) \in E$.

# Число ребер в графах без треугольников

**Доказательство** верхней оценки.
Граф $G$ — без треугольников, поэтому вершины $w_1$ и $w_2$ не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной $u \in V'$, откуда $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) \le p$.
Следовательно,

$$|E| \le s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2.$$

2. Случай нечетного $p$ доказывается аналогично.

## Число ребер в графах без треугольников

**Доказательство** нижней оценки.
Граф называется **двудольным**, если его вершины можно разбить на две непересекающиеся части (доли) так, что смежны только вершины из разных частей.

Двудольный граф с долями из $m$ и $n$ вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным двудольным** графом $K_{m,n}$.

Графы без треугольников $K_{s,s}$ и $K_{s,(s+1)}$ при четном $p = 2s$ и нечетном $p = 2s + 1$ соответственно показывает достижимость верхней оценки.

$\square$

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Теорема 5 (Турана).** *При* $p \geq 1$, $n \geq 3$ *справедливо равенство*

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

*где* $r$ *— остаток от деления* $p$ *на* $(n-1)$.

# Задачи

**1**. Является ли свойство $P$ графов наследственным, если:

1) $P$ — «граф связный»;
2) $P$ — «граф несвязный»;
3) $P$ — «граф без циклов»;
4) $P$ — «граф двудольный»?

Ответ обосновать.

**2**. Существует ли связный планарный граф (без петель и кратных ребер) $G = (V, E)$, в котором:

1) 7 вершин и 16 ребер;
2) 8 вершин и 17 ребер;
3) 6 вершин и 9 граней;
4) 9 ребер и 6 граней?

Ответ обосновать.

# Задачи

**3**. Изобразить связный планарный граф (без петель и кратных ребер) $G = (V, E)$ с наибольшим числом ребер, в котором

1) 4 вершины;
2) 5 вершин;
3) 6 вершин;
4) 7 вершин.

**4**. Изобразить граф $G = (V, E)$ без треугольников с наибольшим числом ребер, в котором

1) 4 вершины;
2) 5 вершин;
3) 6 вершин;
4) 7 вершин.

# Задачи

**5**. Какое наименьшее число вершин может содержать связный планарный граф (без петель и краных ребер), в котором каждая грань ограничена циклом длины не менее 5, если степень каждой вершины в этом графе равна 3? Изобразить такой граф с наименьшим числом вершин.

Конец лекции 6