Лекция 12. Вероятностный метод. Примеры применения (ассорти)

Лектор — Нагорный Александр Степанович
anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Ориентированные циклы

Пусть $D = (V, E)$ – ориентированный граф с минимальной полустепенью исхода δ, максимальной полустепенью захода Δ и пусть $|E| = e$.

Теорема 1 ([2] Alon and Linial, 1989) Если $e(\Delta\delta + 1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\delta} < 1$, то орграф D содержит ориентированный простой цикл длины, кратной k.

Ориентированные циклы

Доказательство. Очевидно, можно предполагать, что полустепень исхода каждой вершины в точности равна δ, так как иначе можно рассмотреть подграф орграфа D с таким же свойством.

Пусть $f : V \to \{0,1,\dots,k-1\}$ – случайная раскраска множества V, полученная путём выбора для каждой вершины $v \in V$ независимо и равновероятно значения $f(v) \in \{0,1,\dots,k-1\}$.

Ориентированные циклы

Доказательство (продолжение). Для всякой вершины $v \in V$ обозначим через A_v событие **«не существует вершины** $u \in V$, **для которой** $(v, u) \in E$ **и** $f(u) \equiv (f(v) + 1) \bmod k$**»**. Ясно, что $\Pr[A_v] = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\delta}$. Нетрудно проверить, что каждое событие A_v взаимно независимо со всеми событиями A_u, кроме тех, которые удовлетворяют условию

$$N^+(v) \cap \left(u \cup N^+(u)\right) \neq \emptyset,$$

где $N^+(v) = \{w \in V : (v, w) \in E\}$.

Ориентированные циклы

Доказательство (продолжение).

Число таких вершин u не превосходит $\Delta\delta$ и, значит, по нашему предположению и локальной лемме, $\Pr\left[\bigwedge_{v\in V}\overline{A}_v\right] > 0$.

Поэтому существует такая раскраска $f : V \to \{0,1,\dots,k-1\}$, что для каждой вершины $v \in V$ существует вершина $u \in V$, для которой

$$(v,u) \in E \text{ и } f(u) \equiv (f(v)+1) \bmod k. \qquad (1)$$

Ориентированные циклы

Доказательство (окончание). Начав с произвольной вершины $v = v_0 \in V$ и применяя раз за разом (1), мы получим последовательность $v_0, v_1, v_2, \ldots$ вершин из D такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$ и $f(v_{i+1}) \equiv (f(v_i) + 1) \bmod k$ для всех $i \geq 0$.

Пусть j – минимальное целое, для которого существует $l < j$, такое, что $v_l = v_j$. Последовательность $v_l v_{l+1} v_{l+2} \ldots v_j = v_l$ представляет собой простой ориентированный цикл в D, длина которого делится на k. ■

Теорема Каро и Уэя

Обозначим через d_v степень вершины v в графе $G = (V, E)$. Пусть $\alpha(G)$ – максимальный размер независимого множества вершин графа G.

Каро и Уэй доказали следующий результат.

Теорема 2. Справедливо неравенство

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Теорема Каро и Уэя

Доказательство. Пусть «$<$» – линейный порядок на множестве V, выбранный случайно и равновероятно. Положим

$$I = \{v \in V : \{v, w\} \in E \ \Rightarrow v < w\}.$$

Пусть X_v – индикатор события $v \in I$, а $X = \sum_{v \in V} X_v = |I|$.

Для всякого v имеем $\mathbf{E}[X_v] = \Pr[v \in I] = \frac{1}{d_v+1}$, так как $v \in I$ тогда и только тогда, когда v является наименьшим среди v и вершин из её окрестности.

Теорема Каро и Уэя

Доказательство (окончание). Следовательно,

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1},$$

и поэтому существует порядок «$<$», для которого выполнено

$$|I| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Но если $x, y \in I$ и $\{x, y\} \in E$, то $x < y$ и $y < x$. Приходим к противоречию. Таким образом, множество I является независимым и $\alpha(G) \geq |I|$. ■

Теорема Турана

Для всяких $m \leq n$ пусть целые q, r удовлетворяют условиям $n = mq + r$, $0 \leq r < m$, и пусть $e = r\binom{q+1}{2} + (m-r)\binom{q}{2}$. Определим граф $G = G_{n,e}$ на n вершинах и e рёбрах, разделив множество вершин на m максимально близких по мощности классов и соединив две вершины в том и только в том случае, когда они принадлежат одному классу. Ясно, что $\alpha(G_{n,e}) = m$.

Теорема 3([3] Turán, 1941). Пусть граф H имеет n вершин и e рёбер. Тогда $\alpha(H) \geq m$, причём $\alpha(H) = m \Leftrightarrow H \cong G_{n,e}$.

Теорема Турана

Доказательство. В графе $G_{n,e}$, очевидно, $\sum_{v \in V}(d_v + 1)^{-1} = m$, поскольку каждая клика вносит в эту сумму 1.

Положив $e = \sum_{v \in V} d_v/2$, мы минимизируем $\sum_{v \in V}(d_v + 1)^{-1}$, выбирая d_v близкими друг к другу, насколько это возможно.

По теореме 2, для всякого H выполнено неравенство

$$\alpha(H) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1} \geq m.$$

Теорема Турана

Доказательство (продолжение). При $\alpha(H) = m$ мы должны иметь равенство в обоих случаях. Из второго равенства следует, что d_v должны быть близки друг к другу насколько это возможно.

Положив $X = |I|$, как в предыдущей теореме, получим, что $\alpha(H) = \mathbf{E}[X]$. Но $\alpha(H) \geq X$ для любого линейного порядка «$<$», поэтому X должно быть константой.

Предположим, что H не является объединением клик. Тогда существуют $x, y, z \in V$ с $\{x, y\}, \{x, z\} \in E, \{y, z\} \notin E$.

Теорема Турана

Доказательство (окончание).

Пусть «$<$» – порядок, в котором наименьшими являются элементы $x, y, z,$ и «$<'$» – тот же самый порядок, за исключением минимальных элементов, порядок которых – y, z, x. Пусть I, I' – соответствующие множества вершин, все соседи которых «больше» их самих.

Тогда I, I' идентичны за исключением того, что $x \in I$; $y, z \notin I$, в то же время как $x \notin I'$; $y, z \in I'$. Таким образом, X не является константой. То есть, из $\alpha(H) = \mathbf{E}[X]$ следует, что H – это объединение клик, и поэтому $H \cong G_{n,e}$. ■

Теорема Вейерштрасса о приближении

Хорошо известная теорема Вейерштрасса утверждает, что множество действительных полиномов на $[0,1]$ плотно в пространстве всех непрерывных действительных функций, заданных на отрезке $[0,1]$.

Теорема 4 (теорема Вейерштрасса о приближении). Для любой непрерывной действительной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует полином $p(x)$, такой, что $|p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ для всех $x \in [0,1]$.

Мы приведём здесь вероятностное доказательство этой теоремы, принадлежащее Бернштейну.

Теорема Вейерштрасса о приближении

Доказательство ([4] Bernstein, 1912). Так как непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ равномерна непрерывна, найдётся такое $\delta > 0$, что если $x, x' \in [0,1]$ и $|x - x'| \leq \delta$, то $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon/2$. Кроме того, так как f должна быть ограничена, найдётся такое $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ на $[0,1]$.

Пусть $B(n, x)$ обозначает биномиальную случайную величину с n независимыми испытаниями и вероятностью успеха x для каждого из них. Тогда вероятность того, что $B(n, x) = j$, равна $\binom{n}{j} x^j (1 - x)^{n-j}$. Математическое ожидание величины $B(n, x)$ равно nx, а стандартное отклонение есть $\sqrt{nx(1 - x)} \leq \sqrt{n}$.

Теорема Вейерштрасса о приближении

Доказательство (продолжение). В силу неравенства Чебышёва для каждого целого n выполнено неравенство

$$\Pr\left[|B(n,x) - nx| > n^{2/3}\right] \leq \frac{1}{n^{1/3}}.$$

Значит, найдётся такое целое n, что одновременно выполнены неравенства $\Pr\left[|B(n,x) - nx| > n^{2/3}\right] \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ и $\frac{1}{n^{1/3}} < \delta$.

Положим $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right)$. Покажем, что для каждого действительного $x \in [0,1]$ выполнено требуемое неравенство $|P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Теорема Вейерштрасса о приближении

Доказательство (окончание). Действительно, так как $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=1$, то

$$|P_n(x)-f(x)|\le\sum_{i:|i-nx|\le n^{2/3}}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right|+$$

$$+\sum_{i:|i-nx|>n^{2/3}}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\left(\left|f\left(\frac{i}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)\le$$

$$\le\sum_{i:|i/n-x|\le n^{-1/3}<\delta}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right|+$$

$$+\Pr\left[|B(n,x)-nx|>n^{2/3}\right]\cdot 2M\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon,$$

что и завершает доказательство. ■

Локальная раскраска

Следующий результат Эрдёша является ещё одним вероятностным свидетельством того, что хроматическое число графа не может быть найдено путём локального анализа.

Теорема 5 ([5] Erdós, 1962). Для всех натуральных k существует такое $\varepsilon > 0$, что при достаточно больших n существуют графы G на n вершинах с хроматическим числом $\chi(G) > k$, но, тем не менее, $\chi(G|_S) \leq 3$ для любого множества вершин S размера, не большего εn.

Локальная раскраска

Доказательство. Для заданного k пусть числа c и ε удовлетворяют неравенствам

$$c > 2k^2 H(1/k) \ln 2\,, \qquad \varepsilon < e^{-5} 3^3 c^{-3},$$

где $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$.

Пусть $p = c/n$ и пусть $G \sim G(n,p)$. Мы покажем, что граф G почти наверняка удовлетворяет условиям теоремы.

Если $\chi(G) \leq k$, то в графе G, очевидно, существует независимое множество размера n/k.

Локальная раскраска

Доказательство (продолжение). Ожидаемое число таких множеств равно

$$\binom{n}{n/k}(1-p)^{\binom{n/k}{2}} < 2^{n(H(1/k)+o(1))}e^{-cn/2k^2(1+o(1))},$$

что есть $o(1)$, исходя из нашего выбора величины c. Следовательно, почти наверняка $\chi(G) > k$.

Предположим, что для раскраски некоторого множества S, содержащего $t \leq \varepsilon n$ вершин, необходимо не менее четырёх цветов. Тогда существует минимальное такое множество S.

Локальная раскраска

Доказательство (продолжение). Для любого $v \in S$ существует 3-раскраска множества $S \setminus \{v\}$. Если v имеет двух или менее соседей в S, то эта раскраска может быть продолжена до 3-раскраски S.

Следовательно, любая $v \in S$ имеет степень не меньше трёх в $G|_S$, и поэтому граф $G|_S$ содержит не менее $3t/2$ рёбер. Вероятность того, что некоторые $t \leq \varepsilon n$ вершин имеют не меньше $3t/2$ рёбер, меньше, чем

$$\sum_{t \leq \varepsilon n} \binom{n}{t} \binom{\binom{t}{2}}{3t/2} \left(\frac{e}{n}\right)^{3t/2}.$$

Локальная раскраска

Доказательство (окончание). Мы наметим путь дальнейших рассуждений. Когда $t = O(1)$, множителями можно пренебречь. В противном случае мы оцениваем каждый множитель сверху:

$$\left[\frac{ne}{t}\left(\frac{te}{3}\right)^{3/2}\left(\frac{c}{n}\right)^{3/2}\right]^t \leq \left(e^{5/2}3^{-3/2}c^{3/2}\sqrt{t/n}\right)^t.$$

Теперь, поскольку $t \leq \varepsilon n$, последняя величина в скобках не превосходит значения $e^{5/2}3^{-3/2}c^{3/2}\varepsilon^{1/2}$. Из условия на ε следует, что последнее выражение меньше единицы. Вся сумма равна $o(1)$, т. е., почти наверняка такого S не существует. ■

Вершинно-транзитивные графы

Определение 1. Вершинно-транзитивным называется такой граф $G = (V, E)$, что для любых двух вершин u и v множества V существует автоморфизм графа G, отображающий u в v.

Определение 2. Случайным блужданием длины l в графе G, начинающимся в вершине v, называется случайная последовательность $v = v_0, v_1, \dots, v_l$, где каждая вершина v_{i+1} выбирается случайно и независимо среди соседей вершины v_i $(0 \leq i < l)$.

Вершинно-транзитивные графы

Следующая теорема утверждает, что для каждого вершинно-транзитивного графа вероятность того, что случайное блуждание чётной длины в G заканчивается в его начальной точке, не меньше вероятности того, что оно заканчивается в любой другой вершине.

Заметим также, что это, вообще говоря, не верно для регулярных графов, и требование вершинной транзитивности необходимо.

Блуждания в вершинно-транзитивных графах

Теорема 6. Пусть $G = (V, E)$ – вершинно-транзитивный граф. Для целого k и двух (не обязательно различных) вершин u и v из V обозначим через $P^k(u, v)$ вероятность того, что случайное блуждание длины k, начинающееся в u, заканчивается в v. Тогда для каждого целого k и любых двух вершин $u, \mathrm{v} \in V$ справедливо неравенство

$$P^{2k}(u, u) \geq P^{2k}(u, v).$$

Но сначала докажем простой результат, который иногда приписывают Чебышёву.

Лемма Чебышёва

Лемма 1. Для любой последовательности $\{a_1, \dots, a_n\}$, состоящей из n действительных чисел, и для любой перестановки π на множестве $\{1, \dots, n\}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{\pi(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 .$$

Доказательство леммы 1. Неравенство напрямую следует из того, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\pi(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{\pi(i)}\right)^2 \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Блуждания в вершинно-транзитивных графах

Доказательство теоремы 6. Теперь рассмотрим случайное блуждание длины $2k$, начинающееся в вершине u. Суммируя по всем возможным вершинам w, которые блуждание достигает через k шагов, мы делаем вывод о том, что для любой вершины v выполнены соотношения

$$P^{2k}(u,v) = \sum_{w \in V} P^k(u,w) P^k(w,v) = \sum_{w \in V} P^k(u,w) P^k(v,w), \qquad (2)$$

где последнее неравенство следует из того факта, что G — неориентированный регулярный граф.

Доказательство теоремы 6 (окончание).

Так как граф G вершинно-транзитивный, два вектора $\left(P^k(u,w)\right)_{w\in V}$ и $\left(P^k(v,w)\right)_{w\in V}$ могут быть получены один из другого перестановкой координат.

Следовательно, по лемме 1, максимально возможное значение суммы в правой части соотношения (2) достигается при $u = v$, чем завершается доказательство теоремы. ■

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, с. 101, 113-114, 136, 154-155, 174-175.

2. Alon N. and Linial N. (1989) Cycles of length 0 modulo k in directed graphs // *J. Combinatorial Theory, Ser. B* **47:** pp. 114-119.

3. Turán P. (1941) On an extremal problem in graph theory // *Mat. Fis. Lapok* **48:** pp. 436-452.

Литература к лекции

4. Bernstein S. N. (1912) Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités // *Comm. Soc. Math. Kharkov* **13:** pp. 1-2.

5. Erdós P. (1962) On circuits and subgraphs of chromatic graphs // *Mathematika* **9:** pp. 170-175.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!