# Математическая логика и теория алгоритмов

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

## Лекция 10.

# Полнота резолютивного вывода. Применение метода резолюций.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

**Теорема о полноте резолютивного вывода**

Если $S$ — противоречивая система дизъюнктов, то из $S$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\Box$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Теорема о полноте резолютивного вывода

Если $S$ — противоречивая система дизъюнктов, то из $S$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

## Доказательство.

Если $S$ — противоречивая система дизъюнктов, то согласно теореме Эрбрана существует конечная противоречивая система $S'$ **основных** примеров дизъюнктов из $S$. Поэтому мы

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Теорема о полноте резолютивного вывода

Если $S$ — противоречивая система дизъюнктов, то из $S$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

## Доказательство.

Если $S$ — противоречивая система дизъюнктов, то согласно теореме Эрбрана существует конечная противоречивая система $S'$ **основных** примеров дизъюнктов из $S$. Поэтому мы

1. Вначале покажем, что из противоречивой системы основных примеров дизъюнктов $S'$ можно резолютивно вывести пустой дизъюнкт $\square$.

2. А затем на основе этого вывода построим резолютивный вывод пустого дизъюнкта из самой системы $S$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Лемма об основных примерах дизъюнктов

Если $S'$ — конечная противоречивая система основных примеров дизъюнктов, то из $S'$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Лемма об основных примерах дизъюнктов

Если $S'$ — конечная противоречивая система основных примеров дизъюнктов, то из $S'$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\Box$.

## Доказательство леммы.

Индукцией по числу $N$ различных основных атомов в системе дизъюнктов $S'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Лемма об основных примерах дизъюнктов

Если $S'$ — конечная противоречивая система основных примеров дизъюнктов, то из $S'$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

## Доказательство леммы.

Индукцией по числу $N$ различных основных атомов в системе дизъюнктов $S'$.

**Базис ($N = 0$).** Система $S'$ противоречива. Значит, $S' \neq \emptyset$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Лемма об основных примерах дизъюнктов

Если $S'$ — конечная противоречивая система основных примеров дизъюнктов, то из $S'$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

## Доказательство леммы.

Индукцией по числу $N$ различных основных атомов в системе дизъюнктов $S'$.

**Базис ($N = 0$).** Система $S'$ противоречива. Значит, $S' \neq \emptyset$.

Но в $S'$ нет ни одного атома. Значит, в $S'$ содержится только пустой дизъюнкт $\square$. И он резолютивно выводим из $S'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

**Индуктивный переход ($N+1 \;\; \rightarrow \;\; N$).** Рассмотрим произвольный основной атом $A_0$, входящий в состав дизъюнктов из $S'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

**Индуктивный переход ($N+1 \rightarrow N$).** Рассмотрим произвольный основной атом $A_0$, входящий в состав дизъюнктов из $S'$.
Без ограничения общности (почему?) можем считать, что в $S'$ нет дизъюнктов вида $D \vee A_0 \vee \neg A_0$, одновременно содержащих обе литеры $A_0$ и $\neg A_0$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

**Индуктивный переход ($N+1 \;\to\; N$).** Рассмотрим произвольный основной атом $A_0$, входящий в состав дизъюнктов из $S'$.
Без ограничения общности (почему?) можем считать, что в $S'$ нет дизъюнктов вида $D \vee A_0 \vee \neg A_0$, одновременно содержащих обе литеры $A_0$ и $\neg A_0$.
Разобьем систему $S'$ на три части:

1. $S'_1 = \{D \;:\; D \in S',\ D = \widehat{D}_1 \vee A_0\}$;
2. $S'_2 = \{D \;:\; D \in S',\ D = \widehat{D}_2 \vee \neg A_0\}$;
3. $S'_3 = \{D \;:\; D \in S',\ A_0 \notin D\}$;

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

**Индуктивный переход ($N+1 \;\rightarrow\; N$).** Рассмотрим произвольный основной атом $A_0$, входящий в состав дизъюнктов из $S'$.
Без ограничения общности (почему?) можем считать, что в $S'$ нет дизъюнктов вида $D \vee A_0 \vee \neg A_0$, одновременно содержащих обе литеры $A_0$ и $\neg A_0$.
Разобьем систему $S'$ на три части:

1. $S'_1 = \{D \;:\; D \in S',\; D = \widehat{D}_1 \vee A_0\}$;
2. $S'_2 = \{D \;:\; D \in S',\; D = \widehat{D}_2 \vee \neg A_0\}$;
3. $S'_3 = \{D \;:\; D \in S',\; A_0 \notin D\}$;

и построим все резольвенты по контрарной паре $A_0,\; \neg A_0$

$$S'_0 = \{\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \;:\; D_1 = \widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1,\; D_2 = \widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2\}$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

**Индуктивный переход ($N+1 \;\rightarrow\; N$).** Рассмотрим произвольный основной атом $A_0$, входящий в состав дизъюнктов из $S'$.

Без ограничения общности (почему?) можем считать, что в $S'$ нет дизъюнктов вида $D \vee A_0 \vee \neg A_0$, одновременно содержащих обе литеры $A_0$ и $\neg A_0$.

Разобьем систему $S'$ на три части:

1. $S'_1 = \{D \;:\; D \in S',\; D = \widehat{D}_1 \vee A_0\}$;
2. $S'_2 = \{D \;:\; D \in S',\; D = \widehat{D}_2 \vee \neg A_0\}$;
3. $S'_3 = \{D \;:\; D \in S',\; A_0 \notin D\}$;

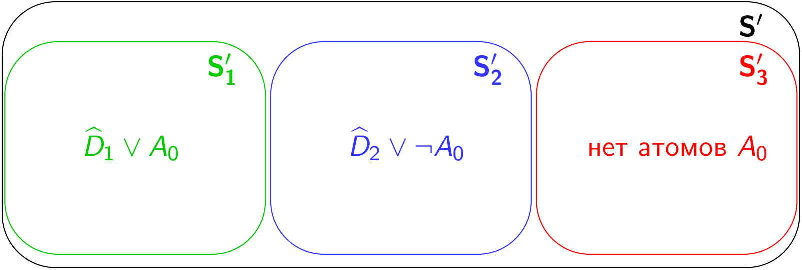
и построим все резольвенты по контрарной паре $A_0,\; \neg A_0$

$$S'_0 = \{\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \;:\; D_1 = \widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1,\; D_2 = \widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2\}$$

Покажем, что множество дизъюнктов $S'' = S'_0 \cup S'_3$ противоречиво.

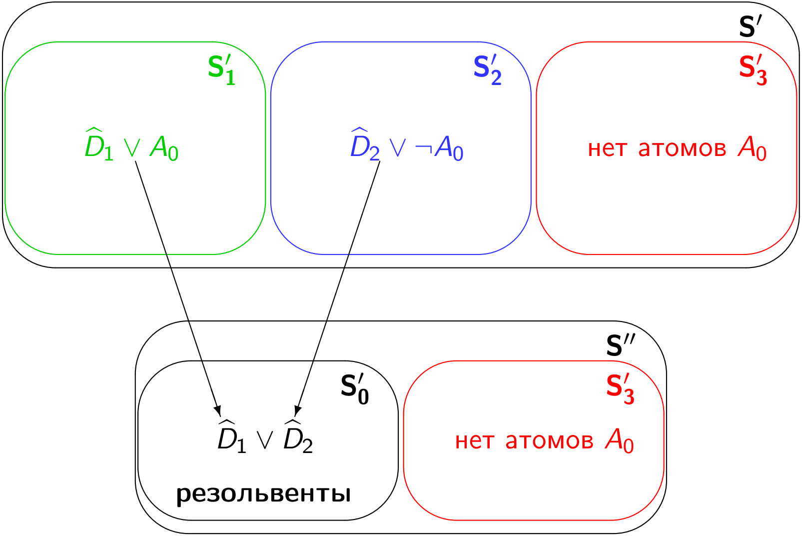
# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.



# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.



# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I$.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I$.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. $S'$ противоречивая система, верно $I \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I$.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. $S'$ противоречивая система, верно $I \not\models S_1' \cup S_2' \cup S_3'$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S_1' = \{D \ : \ D \in S', \ D = \widehat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S_1'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I$.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. $S'$ противоречивая система, верно $I \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S'_1 = \{D \ : \ D \in S', \ D = \widehat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S'_1$.

Значит, $I \not\models S'_2 \cup S'_3$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I$.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. $S'$ противоречивая система, верно $I \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S'_1 = \{D \; : \; D \in S',\; D = \widehat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S'_1$.

Значит, $I \not\models S'_2 \cup S'_3$.

**Возможны два варианта.**

Вариант 1. $I \not\models S'_3$.

# Полнота резолютивного вывода

## Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I$.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. $S'$ противоречивая система, верно $I \not\models S_1' \cup S_2' \cup S_3'$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S_1' = \{D \ : \ D \in S', \ D = \widehat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S_1'$.

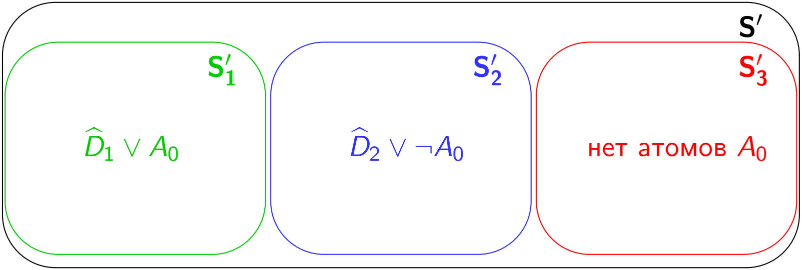
Значит, $I \not\models S_2' \cup S_3'$.

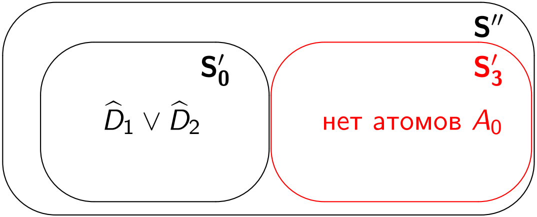
**Возможны два варианта.**

Вариант 1. $I \not\models S_3'$. Тогда $I \not\models S_3' \cup S_0'$, что и требовалось.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

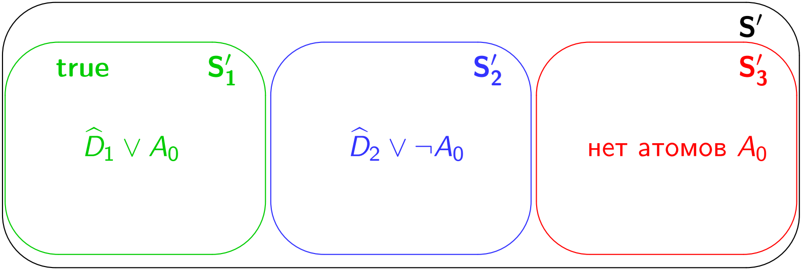
$$\mathbf{I} \models \mathbf{A}_0$$

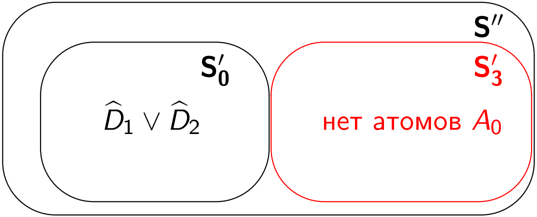


# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

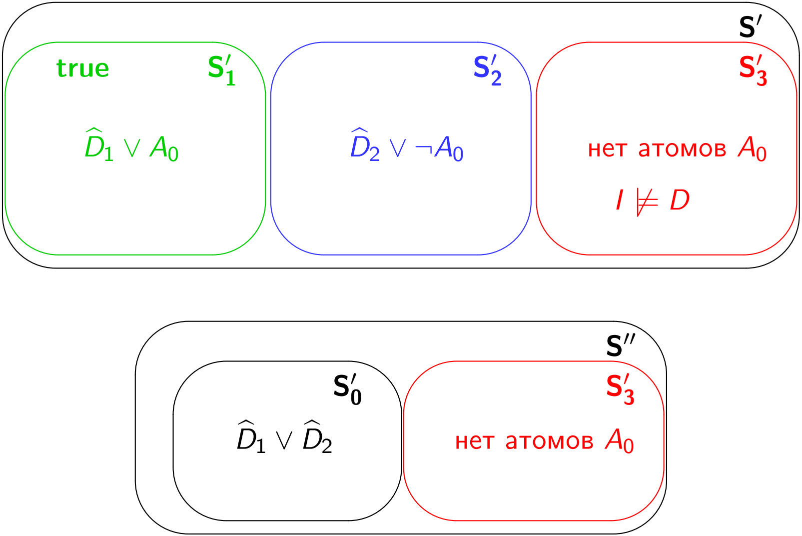
$$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$$



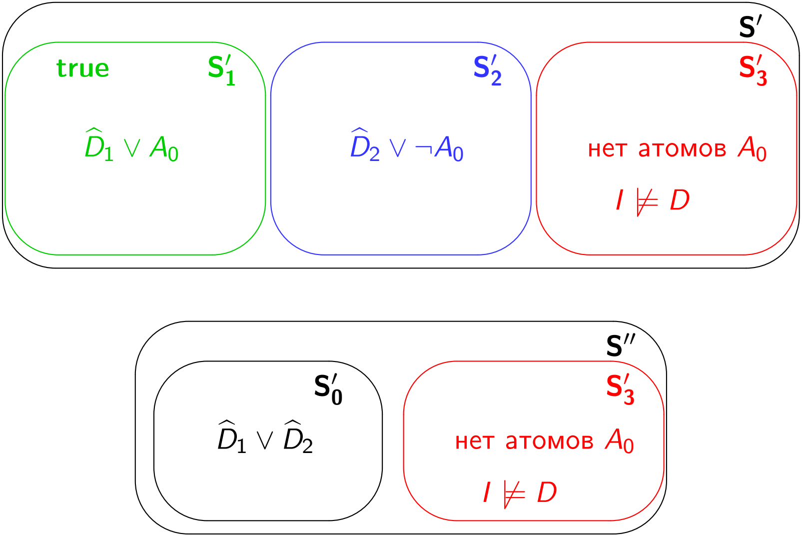
# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 1.**



# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 1.**



# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S_2'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S'_2$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$, что $I \not\models \widehat{D}_2 \vee \neg A_0$. Следовательно, $I \not\models \widehat{D}_2$ (почему? ).

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S_2'$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S_2'$, что $I \not\models \widehat{D}_2 \vee \neg A_0$. Следовательно, $I \not\models \widehat{D}_2$ (почему? ). Т. к. $I \models A_0$.

Рассмотрим теперь интерпретацию $I'$, которая отличается от $I$ только тем, что $I' \not\models A_0$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S_2'$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S_2'$, что $I \not\models \widehat{D}_2 \vee \neg A_0$. Следовательно, $I \not\models \widehat{D}_2$ (почему? ). Т. к. $I \models A_0$.

Рассмотрим теперь интерпретацию $I'$, которая отличается от $I$ только тем, что $I' \not\models A_0$.

Т. к. $I' \not\models S_1' \cup S_2' \cup S_3'$ (ведь $S'$ противоречивая),

$I' \models S_2'$ (ведь $S_2' = \{D : D \in S',\ D = \widehat{D} \vee \neg A_0\}$ и $I' \models \neg A_0$),

$I' \models S_3'$ (а иначе мы бы имели вариант 1, ведь $A_0 \notin S_3'$),

верно $I' \not\models S_1'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S_2'$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S_2'$, что $I \not\models \widehat{D}_2 \vee \neg A_0$. Следовательно, $I \not\models \widehat{D}_2$ (почему? ). Т. к. $I \models A_0$.

Рассмотрим теперь интерпретацию $I'$, которая отличается от $I$ только тем, что $I' \not\models A_0$.

Т. к. $I' \not\models S_1' \cup S_2' \cup S_3'$ (ведь $S'$ противоречивая),

$I' \models S_2'$ (ведь $S_2' = \{D : D \in S',\ D = \widehat{D} \vee \neg A_0\}$ и $I' \models \neg A_0$),

$I' \models S_3'$ (а иначе мы бы имели вариант 1, ведь $A_0 \notin S_3'$),

верно $I' \not\models S_1'$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S_1'$, что $I' \not\models \widehat{D}_1 \vee A_0$. Следовательно, $I' \not\models \widehat{D}_1$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S'_2$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$, что $I \not\models \widehat{D}_2 \vee \neg A_0$. Следовательно, $I \not\models \widehat{D}_2$ (почему? ). Т. к. $I \models A_0$.

Рассмотрим теперь интерпретацию $I'$, которая отличается от $I$ только тем, что $I' \not\models A_0$.

Т. к. $I' \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$ (ведь $S'$ противоречивая),

$I' \models S'_2$ (ведь $S'_2 = \{D : D \in S',\ D = \widehat{D} \vee \neg A_0\}$ и $I' \models \neg A_0$),

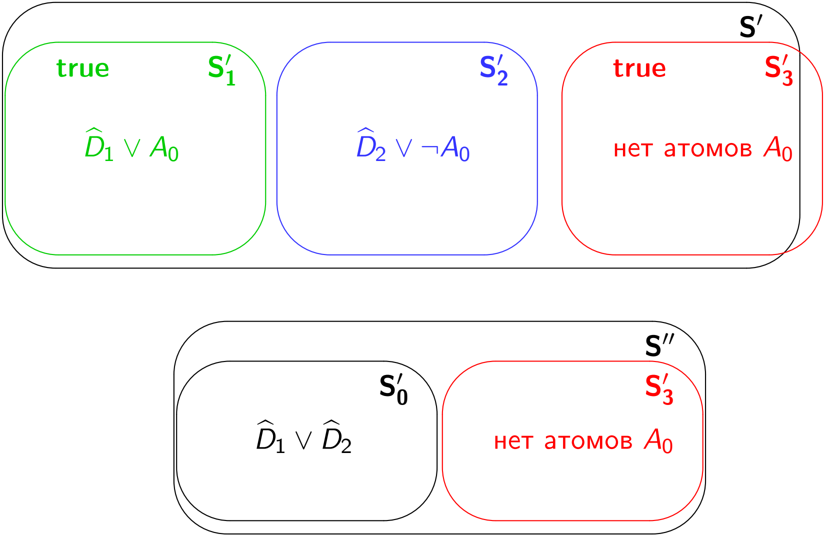
$I' \models S'_3$ (а иначе мы бы имели вариант 1, ведь $A_0 \notin S'_3$),

верно $I' \not\models S'_1$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, что $I' \not\models \widehat{D}_1 \vee A_0$. Следовательно, $I' \not\models \widehat{D}_1$. А поскольку $A_0 \notin \widehat{D}_1$, а $I$ отличается от $I'$ только на атоме $A_0$, верно $I \not\models \widehat{D}_1$ .

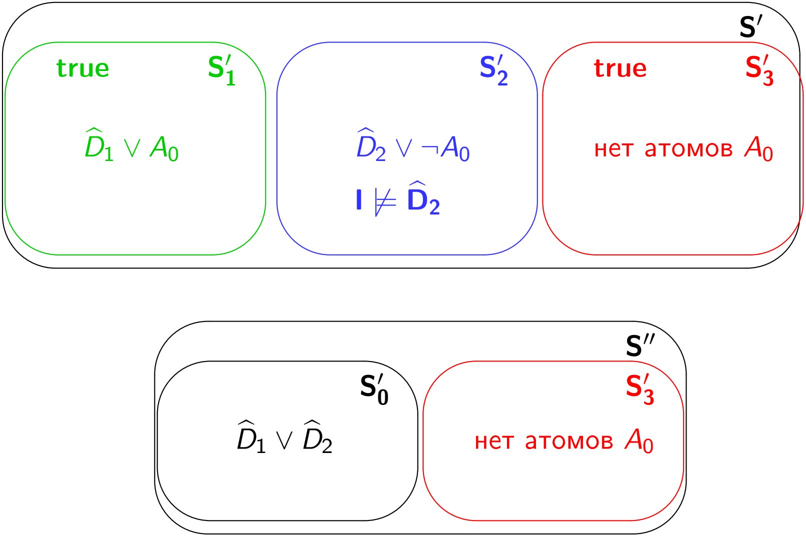
# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**



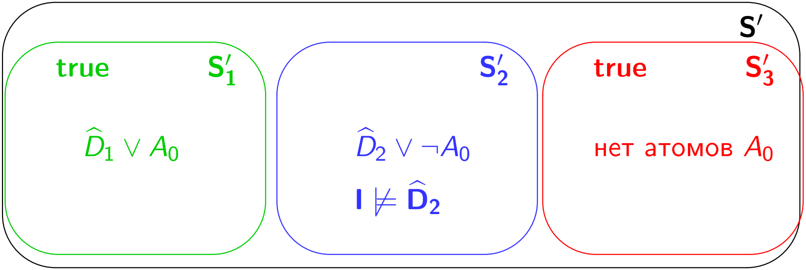
# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

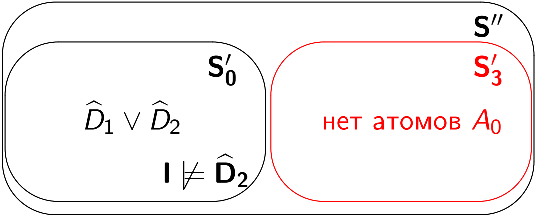
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**



# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

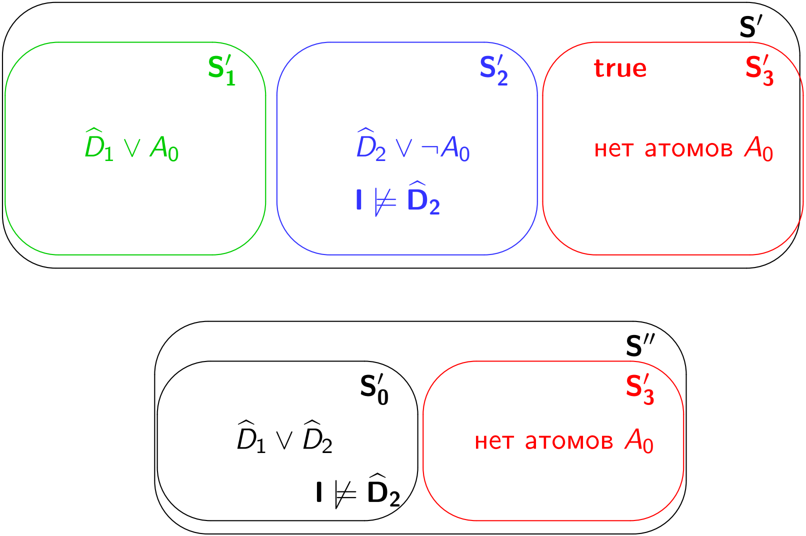
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**



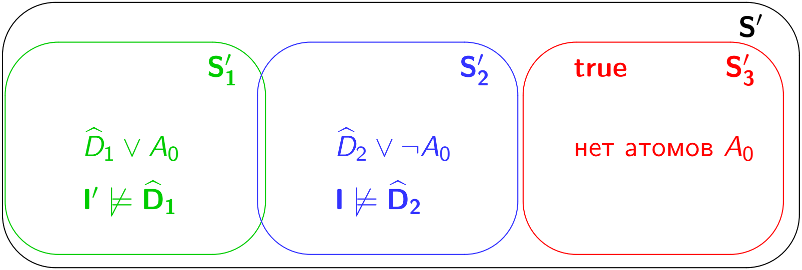
# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

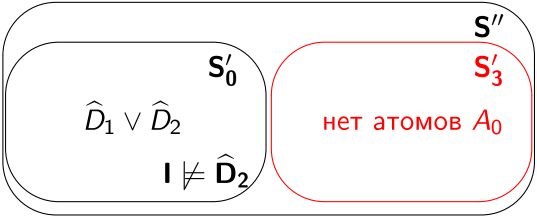
$\mathbf{I'} \not\models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**



# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I'} \not\models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**



# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I}' \not\models \mathbf{A}_0$ **Вариант 2.**

$\mathbf{S}'$

$\mathbf{S}'_1$

$\widehat{D}_1 \vee A_0$

$\mathbf{I}' \not\models \widehat{\mathbf{D}}_1$

$\mathbf{S}'_2$

$\widehat{D}_2 \vee \neg A_0$

$\mathbf{I} \not\models \widehat{\mathbf{D}}_2$

true $\mathbf{S}'_3$

нет атомов $A_0$

$\mathbf{S}''$

$\mathbf{S}'_0$

$\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$

$\mathbf{I} \not\models \widehat{\mathbf{D}}_1$ $\mathbf{I} \not\models \widehat{\mathbf{D}}_2$

$\mathbf{S}'_3$

нет атомов $A_0$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I}' \not\models \mathbf{A}_0$ **Вариант 2.**

$\mathbf{S}'$

$\mathbf{S}'_1$

$\widehat{D}_1 \vee A_0$

$\mathbf{I}' \not\models \widehat{\mathbf{D}}_1$

$\mathbf{S}'_2$

$\widehat{D}_2 \vee \neg A_0$

$\mathbf{I} \not\models \widehat{\mathbf{D}}_2$

**true** $\mathbf{S}'_3$

нет атомов $A_0$

$\mathbf{S}''$

$\mathbf{S}'_0$

$\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$

$\mathbf{I} \not\models \widehat{\mathbf{D}}_1 \vee \widehat{\mathbf{D}}_2$

$\mathbf{S}'_3$

нет атомов $A_0$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \widehat{D}_1$ и $I \not\models \widehat{D}_2$, верно $I \not\models \widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \widehat{D}_1$ и $I \not\models \widehat{D}_2$, верно $I \not\models \widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$.

Остается заметить, что $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$ и $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, и поэтому $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \in S'_0$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

### Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \widehat{D}_1$ и $I \not\models \widehat{D}_2$, верно $I \not\models \widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$.

Остается заметить, что $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S_2'$ и $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S_1'$, и поэтому $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \in S_0'$.

Следовательно, $I \not\models S_0'$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \widehat{D}_1$ и $I \not\models \widehat{D}_2$, верно $I \not\models \widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$.

Остается заметить, что $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S_2'$ и $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S_1'$, и поэтому $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \in S_0'$.

Следовательно, $I \not\models S_0'$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

Итак, в обоих случаях $I \not\models S''$. Т. к. $I$ — произвольная интерпретация, приходим к заключению о том, что система дизъюнктов $S'' = S_0' \cup S_3'$

- противоречивая,
- получена из $S'$ при помощи правила резолюции,
- не содержит атома $A_0$.

Индуктивный переход завершен, и лемма доказана. $\square$

# Полнота резолютивного вывода

### Лемма о подъеме

Пусть $D_1$ и $D_2$ — два дизъюнкта, и при этом $Var_{D_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$.

Пусть $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$ — два основных примера этих дизъюнктов $D_1$ и $D_2$.

Пусть $D_0'$ — резольвента дизъюнктов $D_1'$ и $D_2'$.

Тогда из дизъюнктов $D_1$ и $D_2$ резолютивно выводим дизъюнкт $D_0$, основным примером которого является дизъюнкт $D_0'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Лемма о подъеме

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d] & & D_2 \arrow[d] \\
D_1' = D_1\theta_1 \arrow[dr] & & D_2' = D_2\theta_2 \arrow[dl] \\
& D_0' &
\end{tikzcd}
$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Лемма о подъеме

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[dd] \arrow[dr] & & D_2 \arrow[dd] \arrow[dl] \\
& D_0 \arrow[dd] & \\
D_1' = D_1\theta_1 \arrow[dr] & & D_2' = D_2\theta_2 \arrow[dl] \\
& D_0' &
\end{tikzcd}
$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Лемма о подъеме

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[dd] \arrow[dr] & & D_2 \arrow[dd] \arrow[dl] \\
& D_0 \arrow[dd, shift left] & \\
D_1' = D_1\theta_1 \arrow[dr] & & D_2' = D_2\theta_2 \arrow[dl] \\
& D_0' \arrow[uu, shift left, red] &
\end{tikzcd}
$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Пусть $L_0'$, $\neg L_0'$ — это контрарная пара литер, по которой была построена резольвента $D_0'$ дизъюнктов $D_1'$ и $D_2'$.

$D_1' = \widehat{D}_1' \vee L_0'$,

$D_2' = \widehat{D}_2' \vee \neg L_0'$,

$D_0' = \widehat{D}_1' \vee \widehat{D}_2'$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d] & & D_2 \arrow[d] \\
\widehat{D}'_1 \lor L'_0 = D_1\theta_1 \arrow[dr] & & \widehat{D}'_2 \lor \neg L'_0 = D_2\theta_2 \arrow[dl] \\
& \widehat{D}'_1 \lor \widehat{D}'_2 &
\end{tikzcd}$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Поскольку $D_1' = D_1\theta_1$, литера $L_0'$ является основным примером некоторых литер $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$, входящих в состав дизъюнкта $D_1$, т.е.

$$L_0' = L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = \dots = L_{1k_1}\theta_1.$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Поскольку $D_1' = D_1\theta_1$, литера $L_0'$ является основным примером некоторых литер $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}$, входящих в состав дизъюнкта $D_1$, т.е.

$$L_0' = L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = \cdots = L_{1k_1}\theta_1.$$

Аналогично, литера $\neg L_0'$ является основным примером некоторых литер $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \ldots, \neg L_{2k_2}$, входящих в состав дизъюнкта $D_2$, т. е.

$$\neg L_0' = \neg L_{21}\theta_2 = \neg L_{22}\theta_2 = \cdots = \neg L_{2k_2}\theta_2.$$

# Полнота резолютивного вывода

## Доказательство леммы о подъеме

Поскольку $D_1' = D_1\theta_1$, литера $L_0'$ является основным примером некоторых литер $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}$, входящих в состав дизъюнкта $D_1$, т.е.

$$L_0' = L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = \cdots = L_{1k_1}\theta_1.$$

Аналогично, литера $\neg L_0'$ является основным примером некоторых литер $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \ldots, \neg L_{2k_2}$, входящих в состав дизъюнкта $D_2$, т. е.

$$\neg L_0' = \neg L_{21}\theta_2 = \neg L_{22}\theta_2 = \cdots = \neg L_{2k_2}\theta_2.$$

Значит,

$$D_1 = \widehat{D}_1 \vee L_{11} \vee L_{12} \vee \cdots \vee L_{1k_1}$$

$$D_2 = \widehat{D}_2 \vee \neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee \cdots \vee \neg L_{2k_2}$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{D}_1 \vee L_{11} \vee \dots \vee L_{1k_1} \arrow[d, "\theta_1"] & \widehat{D}_2 \vee \neg L_{21} \vee \dots \vee \neg L_{2k_2} \arrow[d, "\theta_2"] \\
\widehat{D}'_1 \vee L'_0 = D_1\theta_1 \arrow[dr] & \widehat{D}'_2 \vee \neg L'_0 = D_2\theta_2 \arrow[d] \\
& \widehat{D}'_1 \vee \widehat{D}'_2
\end{tikzcd}
$$

# Полнота резолютивного вывода

## Доказательство леммы о подъеме

Так как $L'_0 = L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = \cdots = L_{1k_1}\theta_1$, литеры $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ $\eta_1$, т. е.

$$\eta_1 \in \mathit{НОУ}(L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}), \qquad \theta_1 = \eta_1\rho_1.$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Так как $L'_0 = L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = \dots = L_{1k_1}\theta_1$, литеры $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ $\eta_1$, т. е.

$$\eta_1 \in \mathit{НОУ}(L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}), \qquad \theta_1 = \eta_1\rho_1.$$

Значит $D_1\eta_1$ — склейка дизъюнкта $D_1$ по литерам $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$, и при этом $D'_1 = D_1\theta_1 = (D_1\eta_1)\rho_1$ — основной пример склейки $D_1\eta_1$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Так как $L'_0 = L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = \dots = L_{1k_1}\theta_1$, литеры $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ $\eta_1$, т. е.

$$\eta_1 \in \mathit{НОУ}(L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}), \quad \theta_1 = \eta_1\rho_1.$$

Значит $D_1\eta_1$ — склейка дизъюнкта $D_1$ по литерам $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$, и при этом $D'_1 = D_1\theta_1 = (D_1\eta_1)\rho_1$ — основной пример склейки $D_1\eta_1$.

Аналогично, литеры $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \dots, \neg L_{2k_2}$ имеют НОУ $\eta_2$. Тогда $D_2\eta_2$ — склейка дизъюнкта $D_2$ по литерам $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \dots, \neg L_{2k_2}$, и при этом $D'_2 = D_2\theta_2 = (D_1\eta_2)\rho_2$ — основной пример склейки $D_2\eta_2$.

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{D}_1 \vee L_{11} \vee \cdots \vee L_{1k_1} \arrow[d, "\eta_1"] & & \widehat{D}_2 \vee \neg L_{21} \vee \cdots \vee \neg L_{2k_2} \arrow[d, "\eta_2"] \\
\widehat{D}_1\eta_1 \vee L_{11}\eta_1 = D_1\eta_1 \arrow[d, "\rho_1"] & & \widehat{D}_2\eta_2 \vee \neg L_{21}\eta_2 = D_2\eta_2 \arrow[d, "\rho_2"] \\
\widehat{D}'_1 \vee L'_0 = D_1\eta_1\rho_1 \arrow[dr] & & \widehat{D}'_2 \vee \neg L'_0 = D_2\eta_2\rho_2 \arrow[dl] \\
& \widehat{D}'_1 \vee \widehat{D}'_2 &
\end{tikzcd}
$$

## Доказательство леммы о подъеме

Согласно нашей привычке переименовывать переменные, дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1$ и $D_2\eta_2$ содержат разные наборы переменных. Поэтому $Dom_{\rho_1} \cap Dom_{\rho_2} = \emptyset$, и существует подстановка $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$:

$$(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{11}\eta_1)\rho_1, \quad (L_{21}\eta_2)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho_2 \ .$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Согласно нашей привычке переименовывать переменные, дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1$ и $D_2\eta_2$ содержат разные наборы переменных. Поэтому $Dom_{\rho_1} \cap Dom_{\rho_2} = \emptyset$, и существует подстановка $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$:

$$(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{11}\eta_1)\rho_1, \quad (L_{21}\eta_2)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho_2 \ .$$

Так как $L'_0 = L_{11}\eta_1\rho_1$ и $\neg L'_0 = \neg L_{21}\eta_2\rho_2$, верно $(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho$, т. е. литеры $L_{11}\eta_1$ и $L_{21}\eta_2$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ $\lambda$, т. е.

$$\lambda \in HOY(L_{11}\eta_1, L_{21}\eta_2), \quad \rho = \lambda\mu.$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Согласно нашей привычке переименовывать переменные, дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1$ и $D_2\eta_2$ содержат разные наборы переменных. Поэтому $Dom_{\rho_1} \cap Dom_{\rho_2} = \emptyset$, и существует подстановка $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$:

$$(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{11}\eta_1)\rho_1, \quad (L_{21}\eta_2)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho_2 \ .$$

Так как $L_0' = L_{11}\eta_1\rho_1$ и $\neg L_0' = \neg L_{21}\eta_2\rho_2$, верно $(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho$, т. е. литеры $L_{11}\eta_1$ и $L_{21}\eta_2$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ $\lambda$, т. е.

$$\lambda \in \mathit{НОУ}(L_{11}\eta_1, L_{21}\eta_2), \quad \rho = \lambda\mu.$$

Поэтому дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1 = \widehat{D}_1\eta_1 \vee L_{11}\eta_1$ и $D_2\eta_2 = \widehat{D}_2\eta_2 \vee \neg L_{21}\eta_2$ имеют резольвенту $D_0 = (\widehat{D}_1\eta_1 \vee \widehat{D}_2\eta_2)\lambda$, и при этом

$$D_0' = \widehat{D}_1' \vee \widehat{D}_2' = \widehat{D}_1\eta_1\rho \vee \widehat{D}_2\eta_2\rho = (\widehat{D}_1\eta_1 \vee \widehat{D}_2\eta_2)\lambda\mu = D_0\mu.$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{D}_1 \vee L_{11} \vee \cdots \vee L_{1k_1} \arrow[d, "\eta_1"] & & \widehat{D}_2 \vee \neg L_{21} \vee \cdots \vee \neg L_{2k_2} \arrow[d, "\eta_2"] \\
\widehat{D}_1\eta_1 \vee L_{11}\eta_1 = D_1\eta_1 \arrow[d, "\rho"'] \arrow[r, "\lambda"] & (\widehat{D}_1\eta_1 \vee \widehat{D}_2\eta_2)\lambda \arrow[dd, "\mu"] & \widehat{D}_2\eta_2 \vee \neg L_{21}\eta_2 = D_2\eta_2 \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[d, "\rho"] \\
\widehat{D}'_1 \vee L'_0 = D_1\eta_1\rho \arrow[dr] & & \widehat{D}'_2 \vee \neg L'_0 = D_2\eta_2\rho \arrow[dl] \\
& \widehat{D}'_1 \vee \widehat{D}'_2 &
\end{tikzcd}
$$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Таким образом, из дизъюнктов $D_1$ и $D_2$ резолютивно выводим дизъюнкт $D_0$, основным примером которого является $D_0'$.

Что и требовалось доказать в лемме о подъеме. $\square$

# ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы о подъеме

Таким образом, из дизъюнктов $D_1$ и $D_2$ резолютивно выводим дизъюнкт $D_0$, основным примером которого является $D_0'$.

Что и требовалось доказать в лемме о подъеме. □

## Завершение доказательства теоремы полноты.

Мы показали, что

1. Противоречивая система дизъюнктов $S$ имеет конечную противоречивую систему $S'$ **основных** примеров (теорема Эрбрана ).
2. Из противоречивой системы основных примеров дизъюнктов $S'$ можно резолютивно вывести пустой дизъюнкт $\square$ (лемма об основных примерах ).
3. Если $\square$ резолютивно выводим из системы основных примеров дизъюнктов $S'$, то $\square$ резолютивно выводим из исходной системы дизъюнктов $S$ (лемма о подъеме ). □

# Применение метода резолюций

Метод резолюций

- корректен,
- полон,
- алгоритмизуем.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Метод резолюций

- корректен,
- полон,
- алгоритмизуем.

Но как пользоваться им для решения **практических** задач?

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вот подходящая логическая задача

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вот подходящая логическая задача

Известно, что

- Даша любит Сашу,

# Применение метода резолюций

Вот подходящая логическая задача

Известно, что

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вот подходящая логическая задача

Известно, что

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вот подходящая логическая задача

Известно, что

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша.

Вопрос: кто любит Дашу?

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Вначале сформулируем задачу на языке логики предикатов.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Вначале сформулируем задачу на языке логики предикатов.

Сформируем алфавит, состоящий из:

- Константы *Даша* ,
- Константы *Саша* ,
- Константы *Паша* ,
- Константы *пиво* ,
- Предикатного символа $L^{(2)}$ : «$L(x, y)$ — $x$ любит $y$».

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

# Применение метода резолюций

## Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \ L(\textit{Даша}, \textit{Саша})$,

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \ L(\textit{Даша}, \textit{Саша}),$
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : \ L(\textit{Саша}, \textit{пиво}),$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \ L(\textit{Даша}, \textit{Саша})$,
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : \ L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \ \& \ \varphi_4$,

$\varphi_3 : \ L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$

$\varphi_4 : \ \forall x \ (\exists y \ (L(\textit{Паша}, y) \ \& \ L(x, y)) \ \rightarrow \ L(\textit{Паша}, x))$.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \; L(\textit{Даша}, \textit{Саша}),$
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : \; L(\textit{Саша}, \textit{пиво}),$
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \;\&\; \varphi_4,$

  $\varphi_3 : \; L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$

  $\varphi_4 : \; \forall x \; (\exists y \; (L(\textit{Паша}, y) \;\&\; L(x, y)) \;\rightarrow\; L(\textit{Паша}, x)).$

Кто любит Дашу? : $\varphi_0 : \; \exists z \; L(z, \textit{Даша}).$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \ L(Даша, Саша),$
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : \ L(Саша, пиво),$
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \ \& \ \varphi_4,$

  $\varphi_3 : \ L(Паша, пиво)$

  $\varphi_4 : \ \forall x \ (\exists y \ (L(Паша, y) \ \& \ L(x, y)) \ \rightarrow \ L(Паша, x)).$

Кто любит Дашу? : $\varphi_0 : \ \exists z \ L(z, Даша).$

## Формулировка задачи.

Проверить, верно ли, что $\{\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \varphi_4\} \models \varphi_0.$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

1. Сводим проблему логического следования

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4\} \models \varphi_0$$

к проблеме общезначимости

$$\models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \varphi_4 \rightarrow \varphi_0.$$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

1. Сводим проблему логического следования

$$\{\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \varphi_4\} \ \models \ \varphi_0$$

к проблеме общезначимости

$$\models \ \varphi_1 \ \& \ \varphi_2 \ \& \ \varphi_3 \ \& \ \varphi_4 \ \rightarrow \ \varphi_0.$$

2. Сводим проблему общезначимости к проблеме противоречивости

$$\psi_1 \ = \ \neg \, (\varphi_1 \ \& \ \varphi_2 \ \& \ \varphi_3 \ \& \ \varphi_4 \ \rightarrow \ \varphi_0)$$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

3. Строим предваренную нормальную форму ПНФ

$$\psi_2 = \forall x \forall y \forall z \Big( L(\textit{Даша}, \textit{Саша})\ \&$$
$$L(\textit{Саша}, \textit{пиво})\ \&$$
$$L(\textit{Паша}, \textit{пиво})\ \&$$
$$(\neg L(\textit{Паша}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\textit{Паша}, x))\ \&$$
$$\neg L(z, \textit{Даша}) \Big).$$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

3. Строим предваренную нормальную форму ПНФ

$$\psi_2 \;=\; \forall x \forall y \forall z \;\Big( L(\textit{Даша}, \textit{Саша})\;\&\; L(\textit{Саша}, \textit{пиво})\;\&\; L(\textit{Паша}, \textit{пиво})\;\&\; (\neg L(\textit{Паша}, y) \;\vee\; \neg L(x, y) \;\vee\; L(\textit{Паша}, x))\;\&\; \neg L(z, \textit{Даша}) \Big).$$

4. Строим сколемовскую стандартную форму — она совпадает с ПНФ.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

5. Строим систему дизъюнктов $S$

$$\begin{aligned} S \quad = \quad \{D_1 &= L(\textit{Даша}, \textit{Саша}), \\ D_2 &= L(\textit{Саша}, \textit{пиво}), \\ D_3 &= L(\textit{Паша}, \textit{пиво}), \\ D_4 &= \neg L(\textit{Паша}, y) \ \vee \ \neg L(x, y) \ \vee \ L(\textit{Паша}, x), \\ D_0 &= \neg L(z, \textit{Даша}) \ \}. \end{aligned}$$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

5. Строим систему дизъюнктов $S$

$$
\begin{aligned}
S \;=\; \{D_1 &= L(\textit{Даша}, \textit{Саша}),\\
D_2 &= L(\textit{Саша}, \textit{пиво}),\\
D_3 &= L(\textit{Паша}, \textit{пиво}),\\
D_4 &= \neg L(\textit{Паша}, y) \;\vee\; \neg L(x, y) \;\vee\; L(\textit{Паша}, x),\\
D_0 &= \neg L(z, \textit{Даша})\ \}.
\end{aligned}
$$

6. А теперь будем строить резолютивный вывод.

Будем руководствоваться такой стратегией:

- Начнем с дизъюнкта-запроса $D_0$;
- На каждом шаге вывода будем использовать последнюю из построенных резольвент (линейный вывод ).

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_0' = \neg L(z, Даша)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_0' = \neg L(z, \text{\textit{Даша}})$ $\qquad$ $D_4 = \neg L(\text{\textit{Паша}}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{\textit{Паша}}, x_1)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_0' = \neg L(z, Даша)$ $\qquad$ $D_4 = \neg L(Паша, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(Паша, x_1)$

$\theta_1 = \{z/Паша, x_1/Даша\}$

$D_1' = \neg L(Паша, y_1) \vee \neg L(Даша, y_1)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_0' = \neg L(z, Даша)$ $\qquad$ $D_4 = \neg L(Паша, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(Паша, x_1)$

$\theta_1 = \{z/Даша, x_1/Даша\}$

$D_1' = \neg L(Паша, y_1) \vee \neg L(Даша, y_1)$ $\qquad$ $D_1 = L(Даша, Саша)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_0' = \neg L(z, \text{Даша})$ $\qquad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$

$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$

$D_1' = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1)$ $\qquad D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$

$\theta_2 = \{y_1/\text{Саша}\}$

$D_2' = \neg L(\text{Паша}, \text{Саша})$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша})$ $\quad$ $D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$

$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$

$D'_1 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1)$ $\quad$ $D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$

$\theta_2 = \{y_1/\text{Саша}\}$

$D'_2 = \neg L(\text{Паша}, \text{Саша})$ $\quad$ $D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(x_2, y_2) \vee L(\text{Паша}, x_2)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_0' = \neg L(z, \text{Даша})$ $\quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$

$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$

$D_1' = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1)$ $\quad D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$

$\theta_2 = \{y_1/\text{Саша}\}$

$D_2' = \neg L(\text{Паша}, \text{Саша})$ $\quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(x_2, y_2) \vee L(\text{Паша}, x_2)$

$\theta_3 = \{x_2/\text{Саша}\}$

$D_3' = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша})$ $\qquad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$

$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$

$D'_1 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1)$ $\qquad D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$

$\theta_2 = \{y_1/\text{Саша}\}$

$D'_2 = \neg L(\text{Паша}, \text{Саша})$ $\qquad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(x_2, y_2) \vee L(\text{Паша}, x_2)$

$\theta_3 = \{x_2/\text{Саша}\}$

$D'_3 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_3' = \neg L(\text{\textit{Паша}}, y_2) \vee \neg L(\text{\textit{Саша}}, y_2)$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_3' = \neg L(\textit{Паша}, y_2) \vee \neg L(\textit{Саша}, y_2) \qquad D_2 = L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_3' = \neg L(\textit{Паша}, y_2) \vee \neg L(\textit{Саша}, y_2)$ $\quad D_2 = L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$

$\theta_4 = \{y_2/\textit{пиво}\}$

$D_4' = \neg L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_3' = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2)$ $\qquad$ $D_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$

$\theta_4 = \{y_2/\text{пиво}\}$

$D_4' = \neg L(\text{Паша}, \text{пиво})$ $\qquad$ $D_3 = L(\text{Паша}, \text{пиво})$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D_3' = \neg L(\textit{Паша}, y_2) \vee \neg L(\textit{Саша}, y_2)$ $\qquad D_2 = L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$

$\theta_4 = \{y_2/\textit{пиво}\}$

$D_4' = \neg L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$ $\qquad D_3 = L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$

$\theta_5 = \varepsilon$

$D_5' = \square$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_3 = \neg L(\textit{Паша}, y_2) \vee \neg L(\textit{Саша}, y_2) \qquad D_2 = L(\textit{Саша}, \textit{пиво})$$

$$\theta_4 = \{y_2/\textit{пиво}\}$$

$$D'_4 = \neg L(\textit{Паша}, \textit{пиво}) \qquad D_3 = L(\textit{Паша}, \textit{пиво})$$

$$\theta_5 = \varepsilon$$

$$D'_5 = \square$$

**Успешный резолютивный**

**вывод завершен!**

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Итак, система дизъюнктов $S$ противоречива.

Значит,

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4\} \models \varphi_0.$$

В рамках нашей задачи это означает, что верно утверждение: «Кто-то любит Дашу».

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Итак, система дизъюнктов $S$ противоречива.

Значит,

$$\{\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \varphi_4\} \ \models \ \varphi_0.$$

В рамках нашей задачи это означает, что верно утверждение: «Кто-то любит Дашу».

Но кто же это таинственное существо, любящее Дашу?

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Чтобы ответить и на этот вопрос, возьмем все подстановки-унификаторы, которые мы вычислили по ходу вывода, и посмотрим, какое действие они окажут на **целевую переменную** $z$ в дизъюнкте-запросе

$$D_0 \;=\; \neg L(z, \text{\textit{Даша}}).$$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Чтобы ответить и на этот вопрос, возьмем все подстановки-унификаторы, которые мы вычислили по ходу вывода, и посмотрим, какое действие они окажут на **целевую переменную** $z$ в дизъюнкте-запросе

$$D_0 = \neg L(z, \textit{Даша}).$$

$\theta_1 = \{z/\textit{Паша}, x_1/\textit{Даша}\}$,
$\theta_2 = \{y_1/\textit{Саша}\}$
$\theta_3 = \{x_2/\textit{Саша}\}$
$\theta_4 = \{y_2/\textit{пиво}\}$
$\theta_5 = \varepsilon$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

## Решение задачи.

Чтобы ответить и на этот вопрос, возьмем все подстановки-унификаторы, которые мы вычислили по ходу вывода, и посмотрим, какое действие они окажут на **целевую переменную** $z$ в дизъюнкте-запросе

$$D_0 \;=\; \neg L(z, \textit{Даша}).$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \{z/\textit{Паша}, x_1/\textit{Даша}\},\\
\theta_2 &= \{y_1/\textit{Саша}\}\\
\theta_3 &= \{x_2/\textit{Саша}\}\\
\theta_4 &= \{y_2/\textit{пиво}\}\\
\theta_5 &= \varepsilon
\end{aligned}$$

$$z\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 \;=\; \textit{Паша}$$

Итак, Паша любит Дашу!

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

**Вопрос.**

А кто любит пиво?

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

**Вопрос.**

А кто любит пиво?

А кого любит пиво?

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

**Вопрос.**

А кто любит пиво?

А кого любит пиво?

Попробуйте разобраться с этими вопросами самостоятельно .

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 10.