



Математические модели и методы синтеза СБИС

I часть

С.А.Ложкин, А.М.Марченко



Общая характеристика и аннотация

Общая характеристика курса

Курс «Математические модели и методы синтеза СБИС» является обязательным курсом (спецкурсом) для всех студентов специальности 01.02.09.01 (математическая кибернетика). Его первая часть читается в 7 семестре как обязательный курс в объеме 32 часов лекций, сопровождаемых 16 часами практических занятий, и завершается зачетом. Вторая часть данного курса читается в 8 семестре как обязательный спецкурс в объеме 32 часов лекций, сопровождается 16 часами практических занятий в рамках практикума и завершается экзаменом. Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики. В 2009-2010 учебном году лекции по данному курсу читают профессор Ложкин С. А. (первая часть) и профессор Марченко А. М. (вторая часть), а практические занятия проводят доцент Романов Д. С. и м.н.с. Шуплецов М. С.

Аннотация

Курс «Математические модели и методы синтеза СБИС» посвящен изложению ключевых вопросов, связанных с логическим и топологическим синтезом СБИС. В нем рассматриваются математические модели современных электронных схем, описываются основные подходы к решению задачи логического синтеза СБИС, а также задачи размещения модулей СБИС и трассировки межсоединений. В рамках практических занятий осуществляется знакомство с базовыми пакетами программ логического и топологического синтеза СБИС, формируются навыки работы с этими пакетами.



Программа курса (I часть)

Задача синтеза СБИС и связанные с ней модели дискретных управляющих систем

1. Полевые транзисторы, принцип их работы и устройство. Основные сведения о КМОП-технологии и проектировании СБИС.
 1. *n*- и *p*-канальные транзисторы, их проводимость;
 2. представление об интегральной КМОП-технологии;
 3. задача проектирования СБИС и маршрут ее решения.
2. Простейшие логические схемы на КМОП-транзисторах. Функционирование и классификация комбинационных КМОП-схем, оценка их числа.
 1. логические схемы НЕ, 2-НЕ-ИЛИ и др.;
 2. структура и функционирование КМОП-схемы общего вида, правильные комбинационные КМОП-схемы;
 3. оценка числа правильных комбинационных КМОП-схем;
 4. комбинационные КМОП-схемы с проблемами переключения, схемы с нагрузочными транзисторами и др.
3. Представление об RC-схемах и их задержке. Быстродействие КМОП-схем.
 1. распространение сигнала в КМОП-схемах на примере открытого транзистора;
 2. RC-схемы из дискретных элементов и их задержка, представление об RC-схемах с непрерывным распределением емкости и сопротивления;
 3. основные факторы, влияющие на быстродействие КМОП-схем.
4. Синтез комбинационных КМОП-схем на основе структурного моделирования контактных схем (КС) и итеративных контактных схем (ИКС).
 1. моделирование КС;
 2. моделирование ИКС;
 3. поведение функции Шеннона для сложности правильных комбинационных КМОП-схем.
5. Синтез комбинационных КМОП-схем на основе структурного моделирования схем из функциональных элементов (СФЭ).
 1. моделирование СФЭ в различных базисах и вложение в библиотеку;
 2. СФЭ на негативных элементах и инверсная сложность ФАЛ;
 3. примеры и сравнительный анализ разных типов структурного моделирования.



Программа курса (I часть)

Задача синтеза СБИС и связанные с ней модели дискретных управляющих систем

6. КМОП-схемы с памятью, реализация автоматных функций КМОП-схемами.
 1. логическая и транзисторная схемы RS-триггера, его функционирование;
 2. логическая и транзисторная схемы асинхронной ячейки памяти, ее функционирование;
 3. схема D-триггера и его связь с единичной задержкой;
 4. общая структура автоматных схем, задача их оптимизации.
7. Клеточные схемы как «грубая» топологическая модель СБИС. Порядок функции Шеннона для площади клеточных схем.
 1. клеточные схемы из функциональных и коммутационных элементов в стандартном базисе;
 2. клеточная реализация дешифратора, построенного по совершенной ДНФ;
 3. порядок функции Шеннона для площади клеточных схем.
8. Асимптотика площади дешифратора и ее антагонизм с числом функциональных элементов.
 1. нижняя оценка и асимптотика площади клеточного дешифратора;
 2. нижняя оценка площади дешифратора, построенного асимптотически наилучшим по числу функциональных элементов методом.
9. Основные понятия, связанные с вложением графов. Вложения полных двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки (ППР) минимальной высоты.
 1. вложения графов и связанные с ними понятия;
 2. вложения графов в различные типы ППР, высота полного двоичного и троичного деревьев;
10. Асимптотика площади полных двоичных деревьев. Гомеоморфные вложения полного двоичного дерева в единичные кубы.
 1. асимптотика площади полного двоичного дерева при различных перегрузках и различных способах расположения листьев на границе решетки;
 2. H-деревья и порядок площади полного двоичного дерева при произвольном расположении листьев;
 3. минимальная размерность гиперкуба допускающего гомеоморфное вложение полного двоичного дерева.



Программа курса (I часть)

Основные подходы и методы логического синтеза СБИС

11. Двухуровневый логический синтез и ДНФ. Основные подходы к двухуровневой оптимизации.
 1. реализация функций в виде ДНФ и ее связь с ПЛМ;
 2. простые импликанты и избыточные покрытия;
 3. кофакторы и разложение Шеннона;
 4. использование областей неопределенности (don't care);
12. Многоуровневый логический синтез и связанные с ним представления функций.
 1. скобочные формы, построенные на основе ДНФ;
 2. определение двоичных решающих диаграмм (BDD) и представления функций в виде BDD;
 3. связь BDD с контактными схемами и операции над BDD, различные типы BDD;
 4. выбор оптимального порядка переменных разложения и его значение для упорядоченных BDD.
13. Основные подходы к многоуровневой оптимизации.
 1. декомпозиция и другие структурные операции над булевскими сетями;
 2. упрощение вершин и его основные приемы;
 3. использование булевских и алгебраических делителей;
 4. привязка к библиотечному базису (mapping).
14. Анализ задержек и временная оптимизация схем.
 1. временной анализ транзисторных схем;
 2. модели задержек функциональных элементов и задержки СФЭ;
 3. статические критические пути и борьба с ними, выявление «ложных» критических путей.



Программа курса (I часть)

Логический синтез СБИС в системе SIS

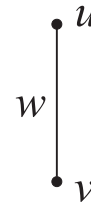
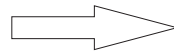
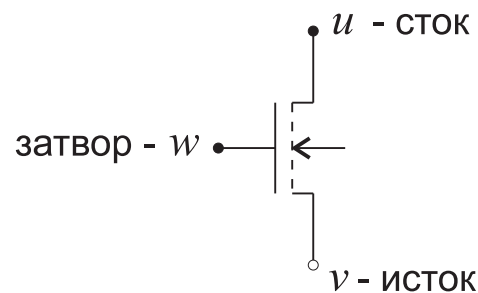
15. Знакомство с системой логического синтеза СБИС SIS. Форматы представления данных.
 1. понятие о логическом синтезе. Общие сведения о системе SIS. Основные возможности системы;
 2. форматы представления данных в SIS: .pla, .blif, .eqn (подробный разбор формата .blif);
 3. формат файлов библиотеки .genlib;
 4. привязка к библиотеке (мэппинг) и пример её простой реализации;
 5. основные команды и операции системы SIS.
16. Алгоритмы логической оптимизации в SIS.
 1. описание двухуровневой и многоуровневой модели представления функций;
 2. алгоритм двухуровневой оптимизации Espresso;
 3. оптимизационные скрипты в SIS (на примере скрипта script.algebraic).
17. Моделирование асинхронных систем.
 1. сети Петри (описание модели и особенности функционирования);
 2. моделирование различных асинхронных систем при помощи сетей Петри;
 3. основные характеристики сетей Петри: ограниченность, живучесть, обратимость (на примере конкретных схем);
 4. дерево и граф покрывающих состояний сети Петри (построение и основные свойства).
 5. матрица смежности сети Петри (основные свойства);
 6. сети Петри со структурными ограничениями (основные классы и их свойства);
18. Асинхронный синтез в SIS.
 1. понятие асинхронной схемы, сигналы и формат представление асинхронных схем (формат ASTG) в системе SIS;
 2. переход от схемы с задержками к ASTG представлению



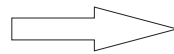
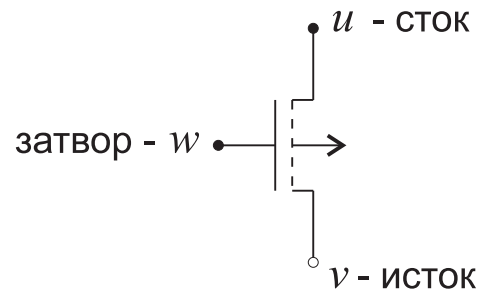
Литература

1. С. А. Ложкин. Лекции по основам кибернетики. — М.: Изд. Отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004.
1. R. K. Brayton. Logic Synthesis. — Univ. of California, Berkeley, 2000.
2. С. А. Ложкин, А. М. Марченко. Математические модели и методы синтеза СБИС.

1. Полевые транзисторы, принцип их работы и устройство

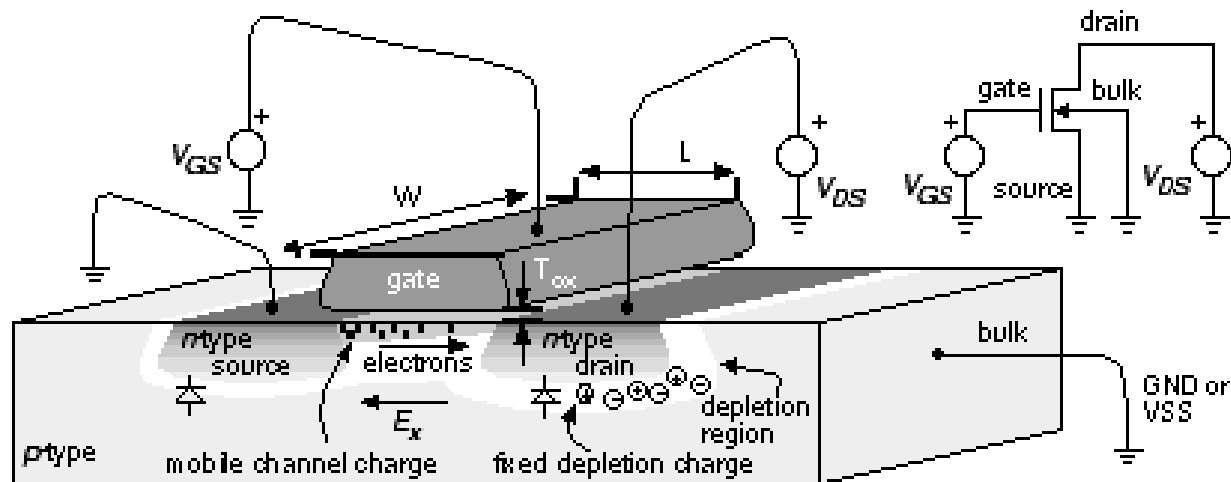


- n-канальный МОП-транзистор; Проводит от u к v и обратно тогда и только тогда, когда на затворе w – высокий потенциал (“1”).

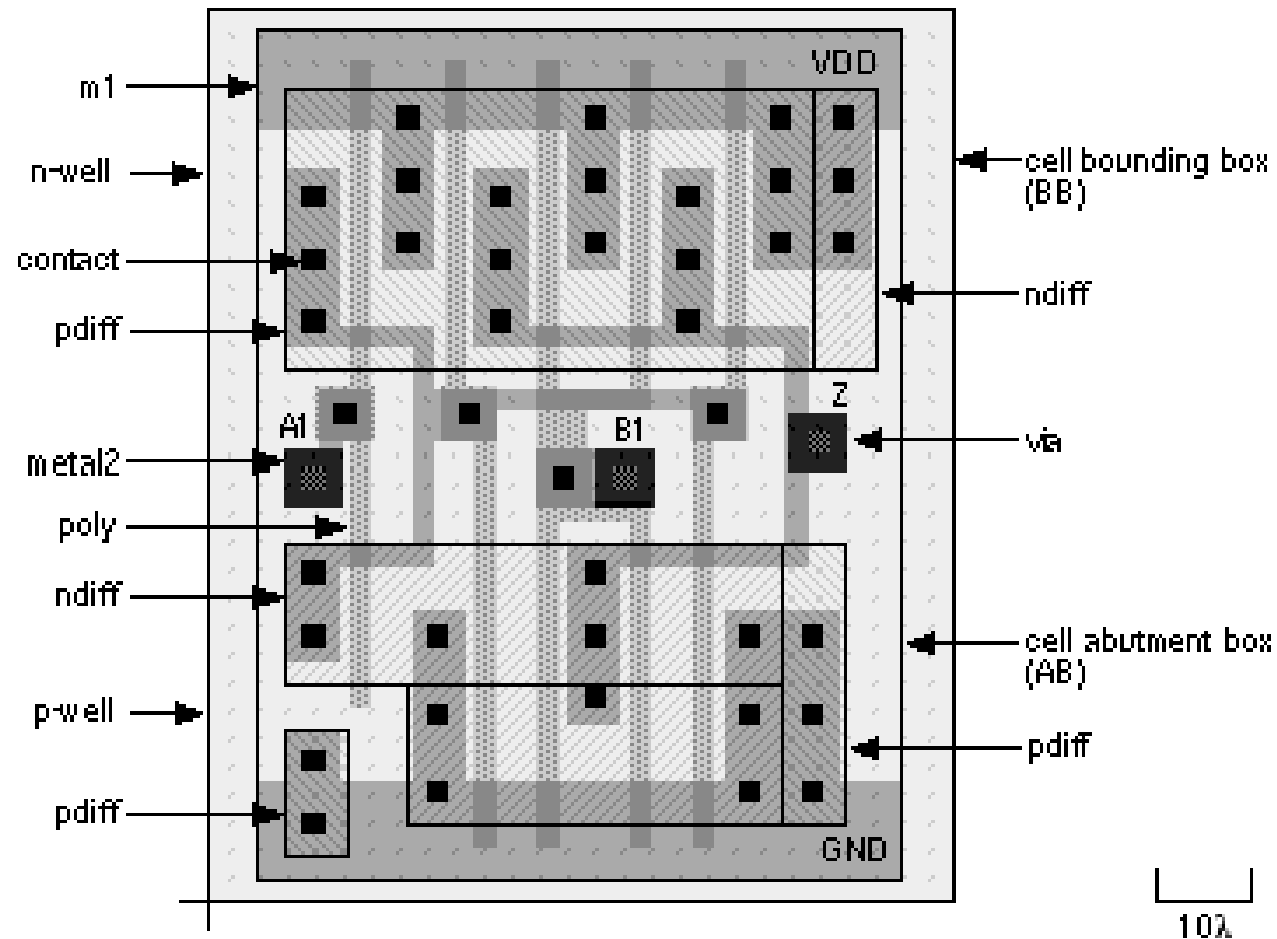


- p-канальный МОП-транзистор; Проводит от u к v и обратно, тогда и только тогда, когда на затворе w – низкий потенциал (“0”).

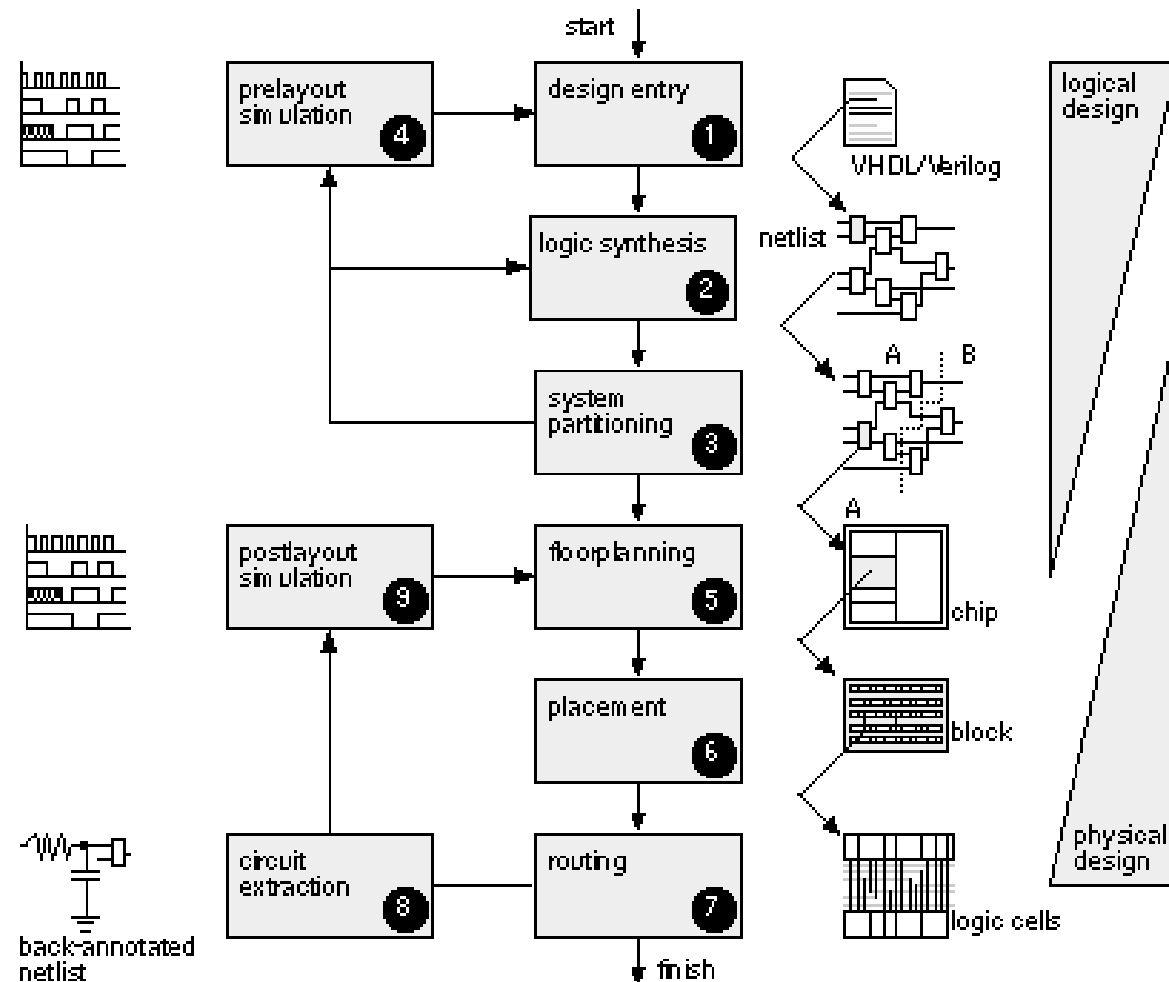
1. Полевые транзисторы, принцип их работы и устройство



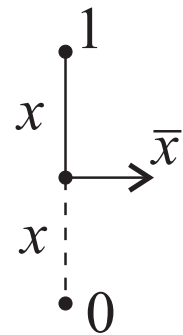
1. Основные сведения о КМОП-технологии и проектировании СБИС



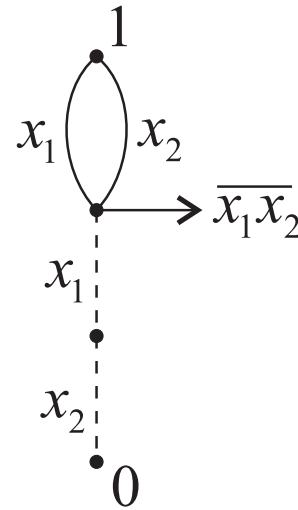
1. Основные сведения о КМОП-технологии и проектировании СБИС



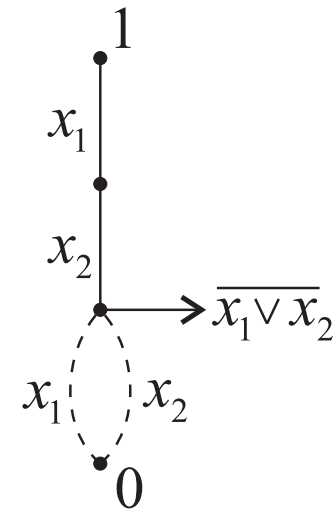
2. Простейшие логические схемы на КМОП-транзисторах



НЕ - инвертор

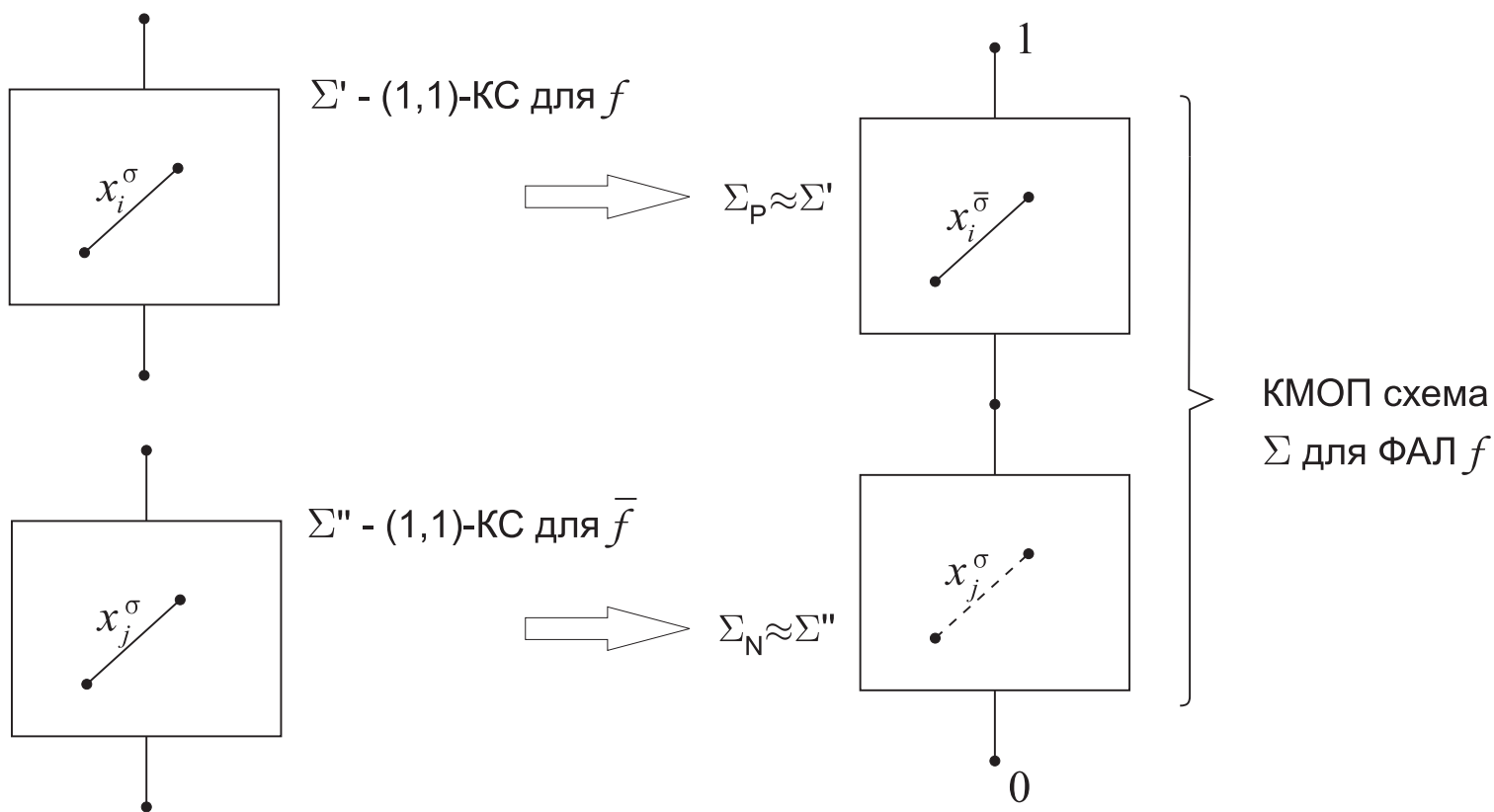


2-НЕ-И

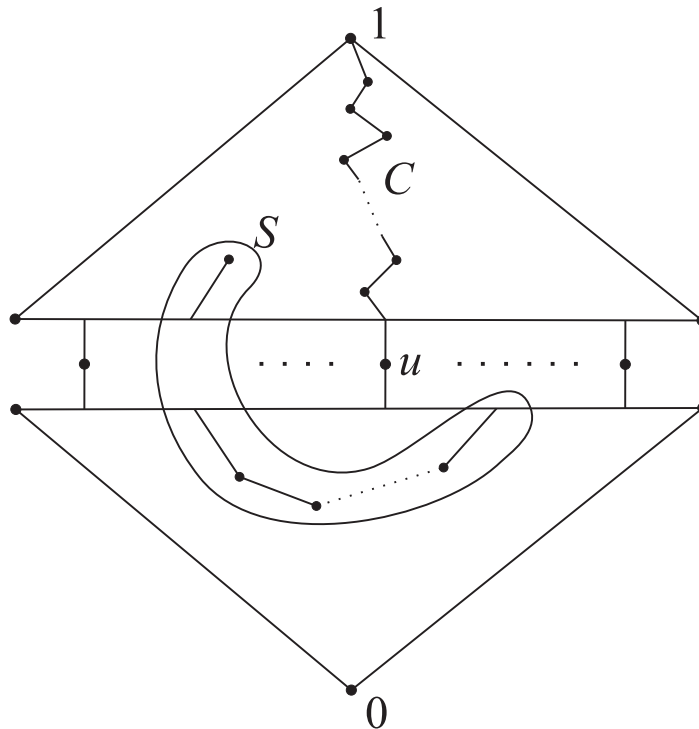


2-НЕ-ИЛИ

2. Функционирование и классификация комбинационных КМОП-схем, оценка их числа



2. Функционирование и классификация комбинационных КМОП-схем, оценка их числа



- Потенциал “1” в вершине u в момент времени t формируется тогда и только тогда, когда к этому моменту сформировались: цепь C из “1” в u , состоящая из открытых p -транзисторов, и сечение S , состоящее из закрытых транзисторов p - и n - типа, которое отрезает u от “0”. Аналогичным образом в вершине u формируется потенциал “0”.
- КМОП-схема Σ – правильная комбинационная схема, если на любом наборе значений входных переменных Σ в процессе её функционирования в любой управляющей или выходной вершине Σ таким образом будет сформирован один из потенциалов “0”, “1”.

2. Функционирование и классификация комбинационных КМОП-схем, оценка их числа

$U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}$ - класс правильных комбинационных КМОП-схем.

Предполагается, что схемы из $U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}$ не имеют входных БП, подаваемых в каналы транзисторов.

Число транзисторов схемы Σ обозначается через $L(\Sigma)$ и называется ее сложностью.

Следующие схемы, состоящие, в основном, из р-транзисторов,

управляемых входными переменными, не входят в $U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}$:

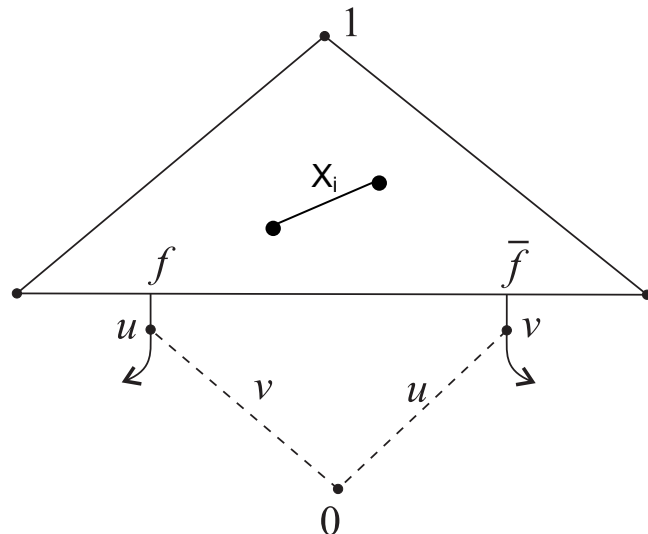


схема с проблемами переключения

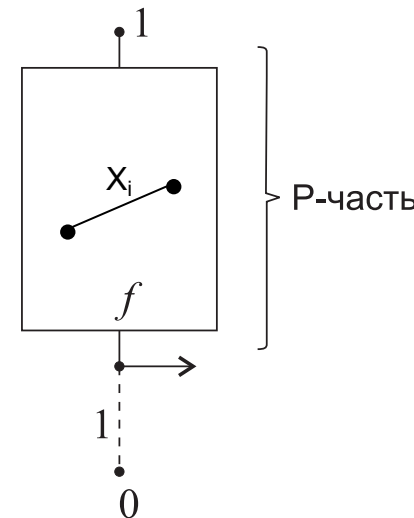



схема с нагрузочным транзистором



2. Функционирование и классификация комбинационных КМОП-схем, оценка их числа

Из определения правильной комбинационной КМОП-схемы Σ следует, что её логическое функционирование однозначно определяется как р-частью этой схемы, так и её п-частью. Таким образом:

$$\|U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}(L, n)\| \leq (c(L + n))^{L+2n},$$

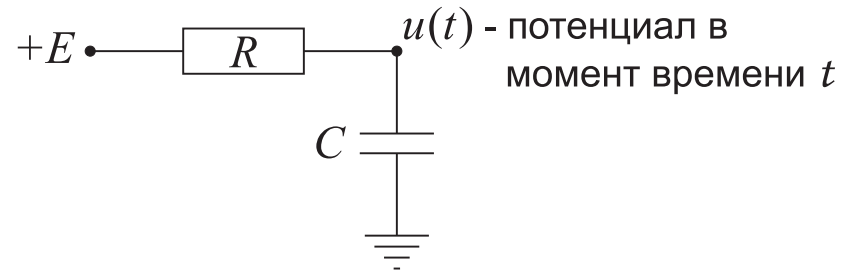
где $U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}$ - множество правильных комбинационных КМОП-схем Σ от n входных БП x_1, \dots, x_n , которые реализуют одну ФАЛ и для которых $L(\Sigma) \leq L$, c -некоторая константа, а $\|U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}(L, n)\|$ - число попарно неэквивалентных схем в этом множестве.

Из указанной оценки на основе обычных мощностных соображений выводится следующая нижняя оценка для соответствующей функции Шеннона $L_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}(L, n)$:

$$L_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}(L, n) \geq \frac{2^n}{n} (1 - \bar{\sigma}(1))$$

3. Представление об RC-схемах и их задержке, быстродействие КМОП-схем

- Открытый транзистор – RC-схема следующего вида:

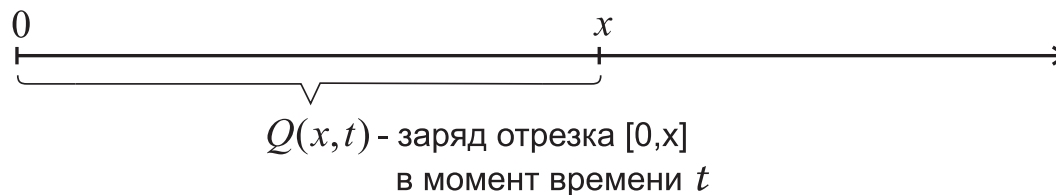
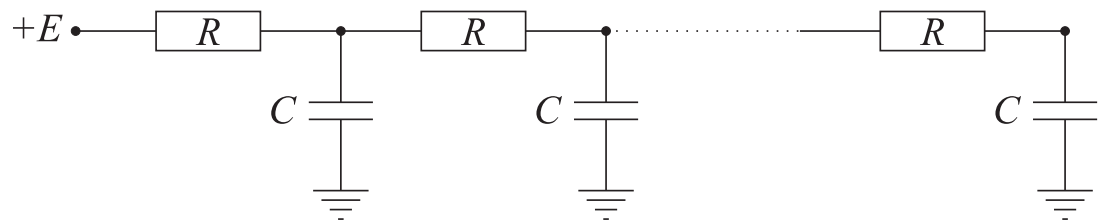


- Функция $u(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d(E - u(t))}{dt} = -\frac{1}{RC}(E - u(t)) \Rightarrow u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

- Таким образом, задержка транзистора – время, за которое потенциал $u(t)$ достигает порогового значения, - пропорциональна RC .

3. Представление об RC-схемах и их задержке, быстродействие КМОП-схем



■ Задержка цепи из n дискретных сопротивлений и емкостей пропорциональна n^2 , то есть квадрату ее длины

■ Непрерывный проводник с линейной плотностью емкости c и линейной плотностью сопротивления r

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{rc} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

■ уравнение теплопроводности, задержка пропорциональна x^2



4. Синтез комбинационных КМОП-схем на основе моделирования КС и ИКС

- $F=(f_1, \dots, f_m)$ – реализуемая система ФАЛ; $L_{КМОП}^{ПК}(F)$ и $L_{КМОП}^{ПК}(n)$ – сложность системы F и функция Шеннона для сложности схем в $U_{КМОП}^{ПК}$ соответственно;
- $(1, m)$ – КС Σ' реализует F , $(1, m)$ – КС Σ'' реализует $\bar{F} \Rightarrow$ КМОП схема $\Sigma=(\Sigma_P, \Sigma_N)$, у которой P -часть Σ_P строится по Σ' , а N -часть Σ_N – по Σ'' , реализует F и является правильной комбинационной КМОП-схемой;
- Моделирование КС дает оценку:

$$L_{КМОП}^{ПК}(n) \leq \frac{2^{n+1}}{n} (1 + \bar{o}(1))$$



4. Синтез комбинационных КМОП-схем на основе моделирования КС и ИКС

- Недостатком моделирования КС является наличие в получаемых схемах длинных цепей из последовательно соединенных транзисторов
- Моделирование итеративных КС(ИКС) происходит аналогично моделированию КС и является наиболее эффективным с точки зрения сложности полученных схем.
- Моделирование ИКС дает асимптотику функции Шеннона

$$L_{КМОП}^{ПК}(n) = \frac{2^n}{n} (1 \pm o(1))$$

- Моделирование ИКС позволяет построить дешифратор порядка 4 со сложностью 66 (моделирование КС – 70)



5. Синтез комбинационных КМОП-схем на основе структурного моделирования СФЭ

- $B_{\text{КМОП}} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_b\}$, где для всех $i, i = 1, \dots, b$, $\Sigma_i \in U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}$ и реализует существенную ФАЛ $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, - исходная библиотека КМОП-схем.
- $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b\}$, где функциональный элемент $\varepsilon_i, i = 1, \dots, b$, реализует БФ φ_i со сложностью $L(\Sigma_i)$ - соответствующий ей базис схем из функциональных элементов (СФЭ).
- Каждой СФЭ S над B соответствует логически эквивалентная ей схема Σ из $U_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}$, для которой $L(\Sigma) = L(S)$, и поэтому $L_B(F) \geq L_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}(F)$, $L_B(n) \geq L_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}(n)$.
- Для $k \geq 2$ $B_{\text{КМОП}}^{(k)} = \{\Sigma_1^{(k)}, \Sigma_2\}$, где $\varphi_1 = \overline{x_1} \cdot \dots \cdot \overline{x_k}$, $\varphi_2 = \overline{x_1}$

Таким образом, $L_{\text{КМОП}}^{\text{ПК}}(n) \leq \frac{2k}{k-1} \frac{2^n}{n} (1 + \bar{o}(1))$

При этом в получаемых схемах отсутствуют цепочки из $(k+1)$ и более последовательно соединенных транзисторов.



5. Синтез комбинационных КМОП-схем на основе структурного моделирования СФЭ

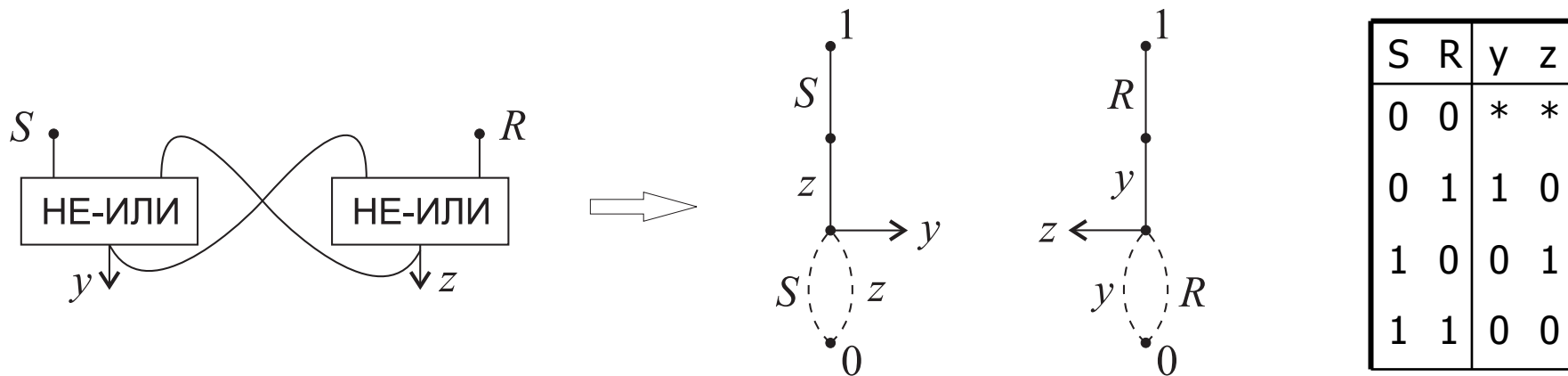
- $B_{НЭ}$ – счетный базис из всех т.н. негативных функциональных элементов (ФЭ), реализующих отрицания монотонных ФАЛ с весом 1.
- СФЭ в базисе $B_{НЭ}$ моделируют КМОП-схемы с нагрузочным транзистором n-типа (см. слайд 15) так, что число этих транзисторов равно сложности соответствующей СФЭ.
- Для системы ФАЛ $F=(f_1, \dots, f_m)$ из m различных ФАЛ отличных от переменных

$$L_{B_{НЭ}}^C(F) = L_{\neg}^C(\bar{F}) + m,$$

где $L_{\neg}^C(G)$ – минимальное число ФЭ \neg при реализации системы ФАЛ G с помощью СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ – инверсная схемная сложность системы ФАЛ G .

6. КМОП-схемы с памятью, реализация автоматных функций КМОП-схемами

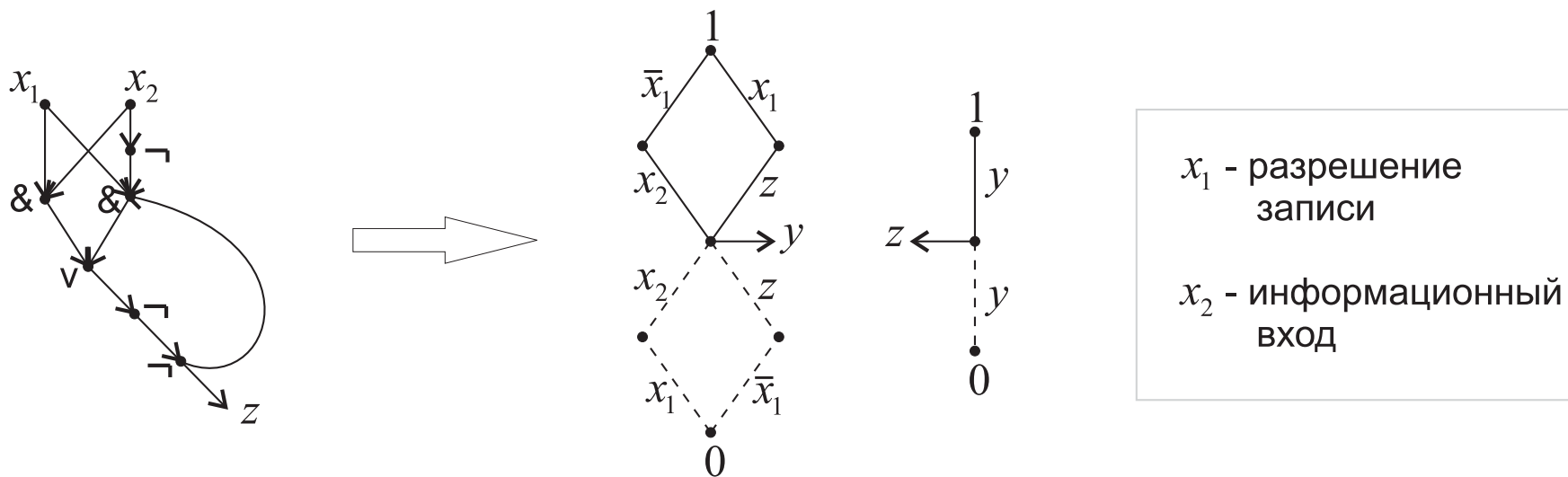
Функциональная и транзисторная схемы RS-триггера:



S	R	y	z
0	0	*	*
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

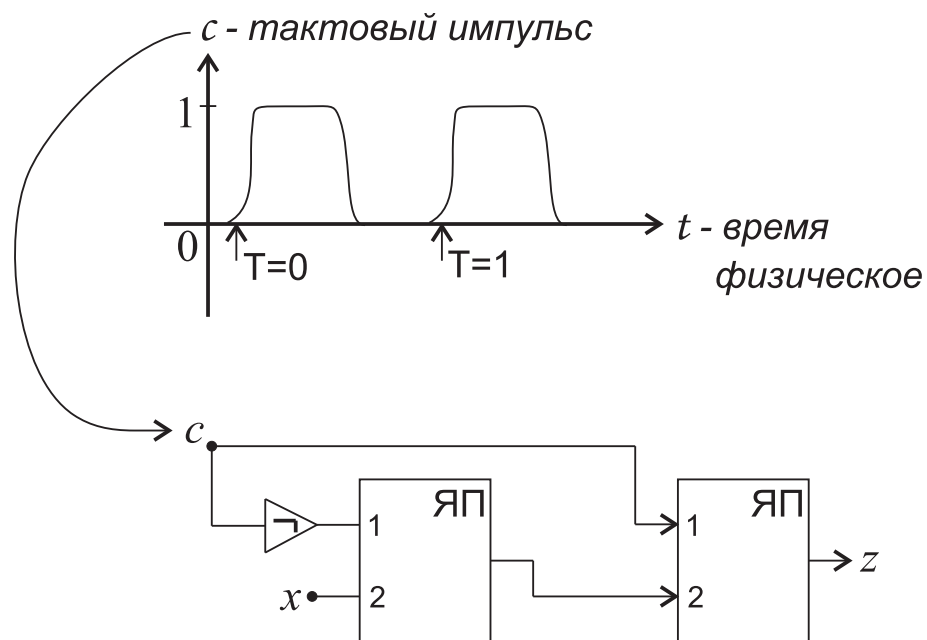
6. КМОП-схемы с памятью, реализация автоматных функций КМОП-схемами

Функциональная и транзисторная схемы ячейки памяти:



6. КМОП-схемы с памятью, реализация автоматных функций КМОП-схемами

D-триггер, как единичная задержка

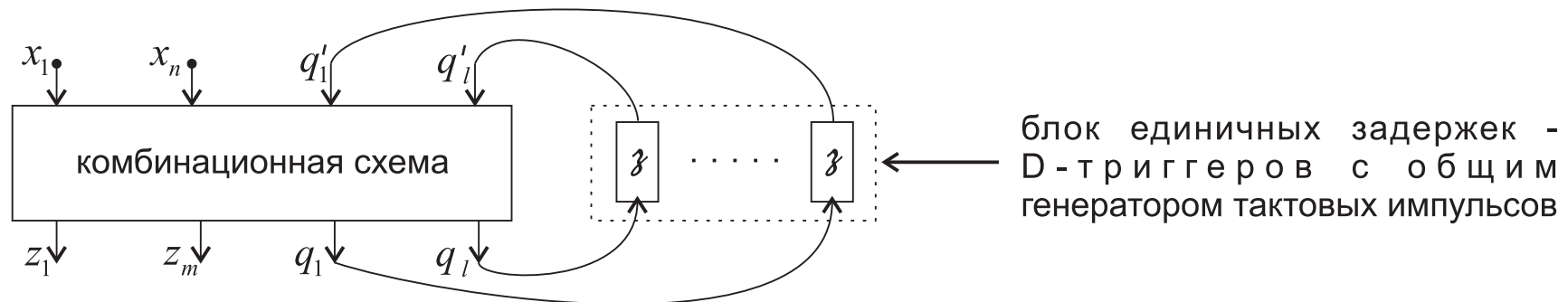


$$z(T+1) = x(T) \Rightarrow$$

\Rightarrow единичная задержка

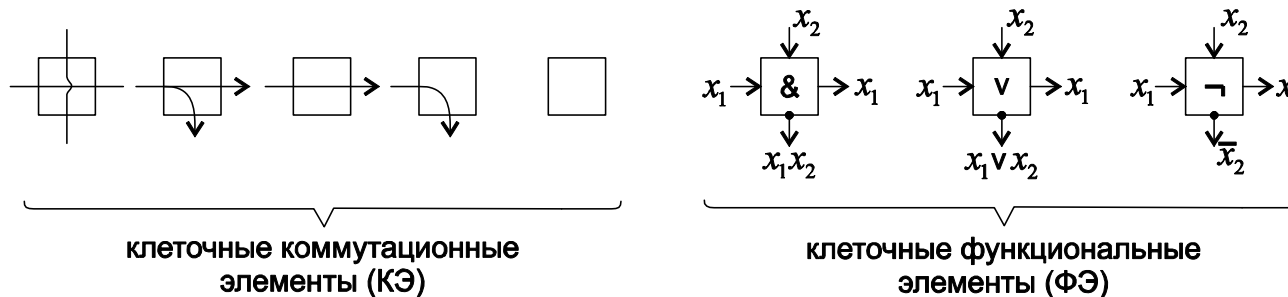
6. КМОП-схемы с памятью, реализация автоматных функций КМОП-схемами

Общая структура автоматной схемы



7. Клеточные схемы как «грубая» топологическая модель СБИС

- Стандартный базис B_0 из функциональных и коммутационных элементов.



- Клеточные СФЭ – вложение СФЭ в плоскую прямоугольную решетку с возможными поворотами ФЭ на углы, кратные $\pi/2$, с использованием КЭ для соединения входов и выходов ФЭ, с расположением входов и выходов схемы на границе решетки.

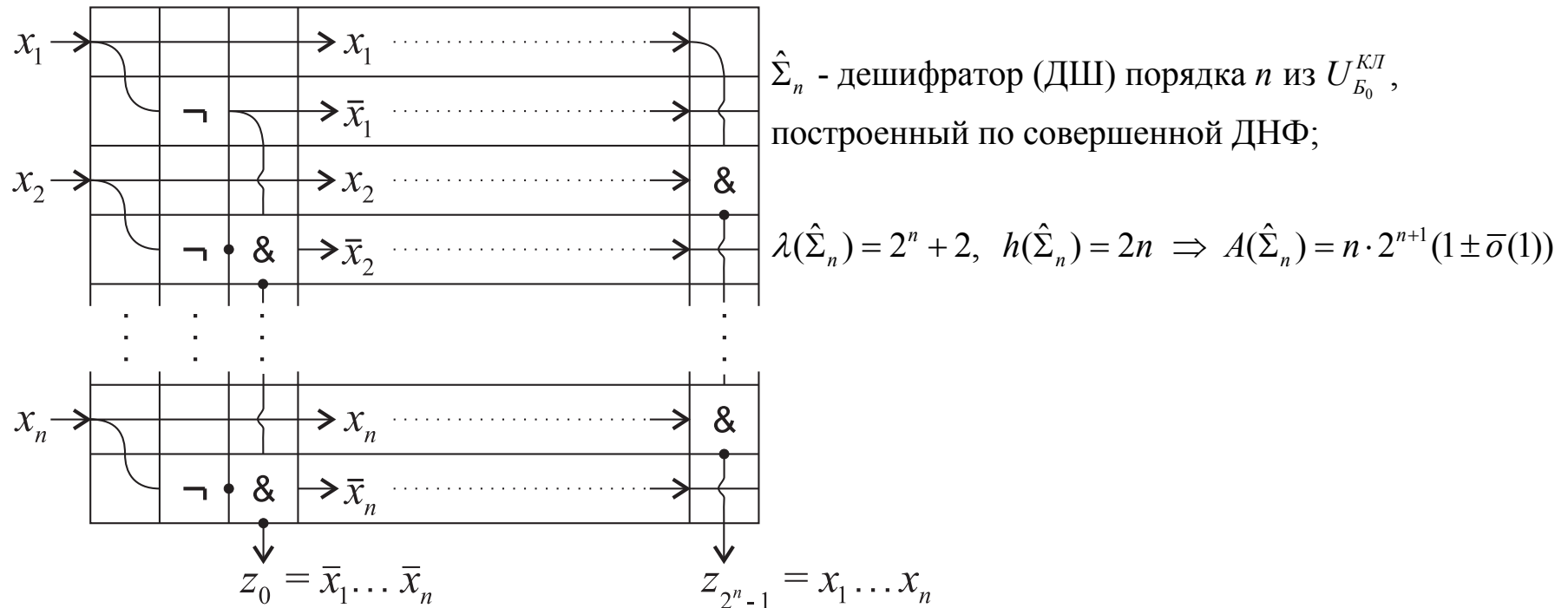
$U_{B_0}^{KL}$ - класс клеточных схем в базисе B_0

$\Sigma \in U_{B_0}^{KL} \Rightarrow \lambda(\Sigma)$ - длина Σ , $h(\Sigma)$ - высота Σ

$A(\Sigma) = \lambda(\Sigma) \cdot h(\Sigma)$ - площадь Σ

7. Клеточные схемы как «грубая» топологическая модель СБИС

- Клеточная реализация дешифратора на основе совершенной ДНФ.



7. Порядок функции Шеннона для площади клеточных схем

$$A(F) = \min_{\substack{\Sigma \in U_{B_0}^{KL} \\ \Sigma \text{ реал. } F}} A(\Sigma), \quad A(n) = \max_{f(x_1, \dots, x_n)} A(f)$$

Нижняя оценка $A(n) \geq c_1 2^n (1 - \bar{o}(1))$ получается из обычных мощностных соображений с учётом того, что число попарно неэквивалентных схем в $U_{B_0}^{KL}$ от БП x_1, \dots, x_n , которые реализуют одну ФАЛ и имеют площадь $\leq A$, не превосходит $(18)^A (n+1)!$

Верхняя оценка $A(n) \leq c_2 2^n (1 + \bar{o}(1))$ получается построением схемы Σ_f , которая реализует произвольную ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ на основе разложения

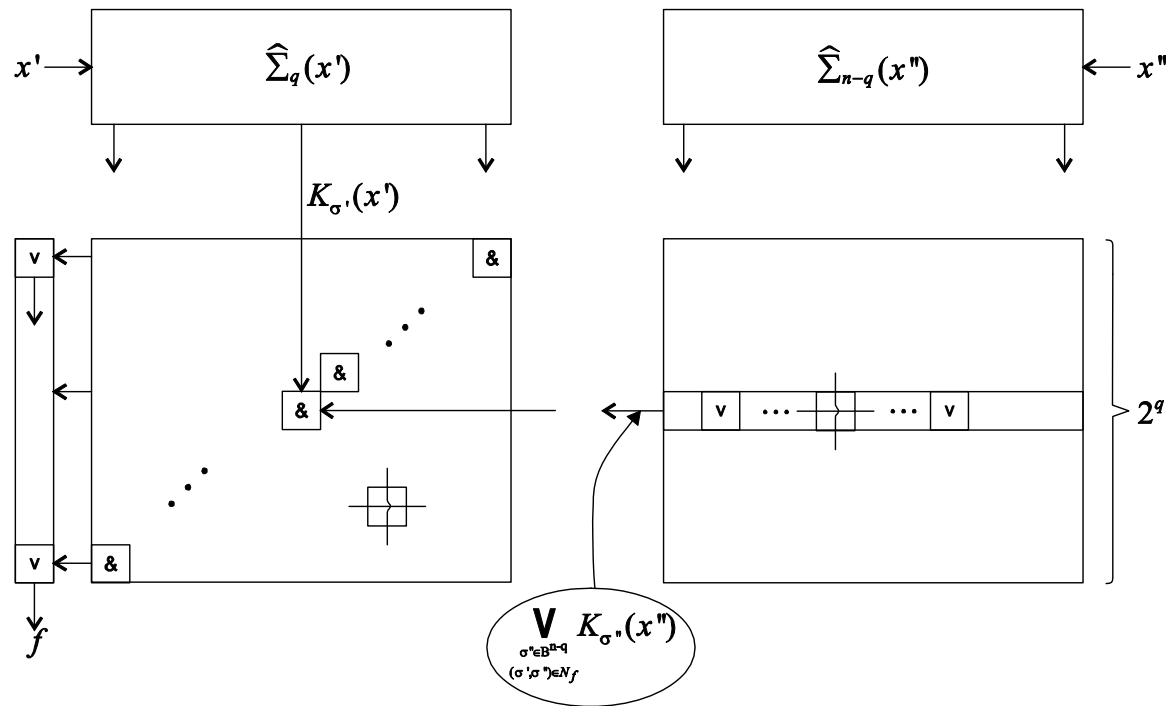
$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma' \in B^q} K_{\sigma'}(x') \left(\bigvee_{\substack{\sigma'' \in B^{n-q} \\ (\sigma', \sigma'') \in N_f}} K_{\sigma''}(x'') \right),$$

где $x' = (x_1, \dots, x_q)$ и $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$,

с использованием построенных выше дешифраторов $\hat{\Sigma}_q(x')$ и $\hat{\Sigma}_{n-q}(x'')$.

7. Порядок функции Шеннона для площади клеточных схем

Схема Σ_f имеет следующий вид:



При $q = \lceil 2 \log n \rceil$, получаем, что $A(\Sigma_f) \leq c_2 2^n (1 + \bar{o}(1))$



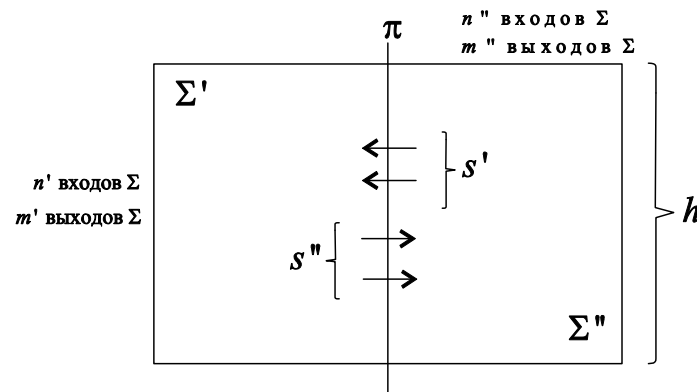
8. Асимптотика площади дешифратора

$$Q_n = \{x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}\} \Rightarrow A(\vec{Q}_n) \geq \frac{1}{2} n \cdot 2^n (1 - \bar{\sigma}(1))$$

Действительно, пусть клеточная СФЭ Σ реализует \vec{Q}_n и обладает тем свойством, что $\lambda(\Sigma) = \lambda \geq h(\Sigma) = h$.

Тогда построим её вертикальный разрез π , который делит Σ на максимально близкие друг к другу по числу содержащихся в них выходов части Σ' и Σ'' . Пусть при этом m' и m'' – число выходов Σ в Σ' и Σ'' , n' и n'' – число входов Σ в Σ' и Σ'' , а s' и s'' – число выходов Σ в Σ' и Σ'' , пересекающих линию разреза π из Σ'' в Σ' и из Σ' в Σ'' соответственно.

8. Асимптотика площади дешифратора



Из свойств Σ и выбора π вытекает справедливость соотношений

$$2^{n'+s'} \geq m' + 1 \geq 2^{n-1}, \quad 2^{n''+s''} \geq m'' + 1 \geq 2^{n-1},$$

перемножая которые получим $2^n \cdot 2^{s'+s''} \geq 2^{2n-2}$ и, следовательно, $h \geq n - 2$.

Таким образом, для параметров схемы Σ будут выполняться неравенства

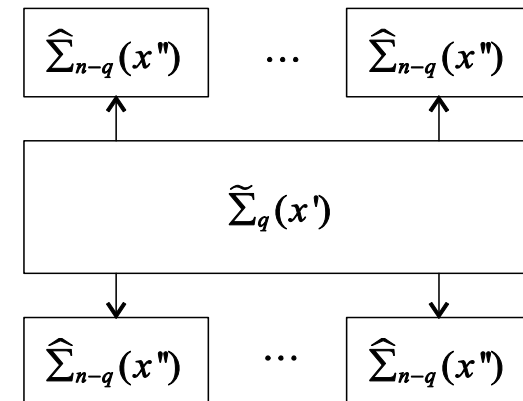
$$\lambda \geq h, \quad 2(h + \lambda) \geq n + 2^n, \quad h \geq n - 2,$$

из которых следует асимптотическая оценка $h\lambda \geq \frac{1}{2}n2^n (1 - \bar{o}(1))$

8. Асимптотика площади дешифратора

Верхняя оценка $A(\vec{Q}_n) \leq \frac{1}{2} n \cdot 2^n (1 + \bar{o}(1))$

доказывается разбиением БП $x = (x_1, \dots, x_n)$ на две группы $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и построением ДШ вида:



где $\tilde{\Sigma}_q(x')$ – ДШ высоты $(q + 2)$ и длины 2^{n-1} , а каждый из 2^q ДШ $\hat{\Sigma}_{n-q}(x'')$ – ДШ, построенный в вопросе 7. Тогда при $n - q = \lceil 2 \log n \rceil$ площадь построенного ДШ асимптотически равна $n2^{n-1}$.




8. Асимптотика площади дешифратора

Пусть $\check{\Sigma}_n$ - дешифратор порядка n из $U_{B_0}^{KL}$, полученный в результате вложения асимптотически оптимального по числу ФЭ дешифратора, построенного на основе дихотомии переменных. Пусть, далее, $h(\check{\Sigma}_n) = h \leq \lambda(\check{\Sigma}_n)$, и пусть каждый выход ДШ $\check{\Sigma}_n$ получается в результате конъюнктирования одного из узлов множества $V^{(1)}$ - множества выходов ДШ $\Sigma^{(1)}$ от БП x_1, \dots, x_{n_1} , - с одним из узлов множества $V^{(2)}$ - множества выходов ДШ $\Sigma^{(2)}$ от БП $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}$, где $n_1 = \lfloor n/2 \rfloor, n_2 = \lceil n/2 \rceil$. Проведем вертикальное сечение π ДШ $\check{\Sigma}_n$ (см. слайд 32) так, чтобы с одной стороны от π оказалось не меньше, чем $N = (2^{n_1-1} - h)$, узлов из $V^{(1)}$, а с другой - не меньше, чем 2^{n_2-1} , узлов из $V^{(2)}$. Тогда в ДШ $\check{\Sigma}_n$ будет существовать N "проводников", пересекающих π и соединяющих i -й из указанных выше узлов множества $V^{(1)}$ с i -м из указанных выше узлов множества $V^{(2)}$, где $i = 1, \dots, N$, причем все эти проводники попарно не пересекаются.

Таким образом, $h \geq N$ и, следовательно, (см. оценки на слайде 32),

$$A(\check{\Sigma}_n) \geq c \cdot 2^{3n/2},$$

то есть площадь ДШ $\check{\Sigma}_n$ существенно больше оптимальной.



9. Основные понятия, связанные с вложением графов

- Вложение графа $G=(V, E)$ в граф $H=(V', E')$ - это отображение $\varphi: V \xrightarrow{\varphi} V'$, $E \xrightarrow{\varphi} C$, где C - множество простых цепей H , а цепь $\varphi((u, v))$ соединяет вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$.
- Вершины из $\varphi(V)$ и цепи из $\varphi(E)$ - основные вершины и транзитные цепи φ , внутренние вершины и ребра цепей из $\varphi(E)$ - транзитные вершины и ребра φ соответственно, а остальные вершины и ребра H - свободные вершины и ребра φ .
- Входы(выходы) сети G при вложении в сеть H переходят в вершины, являющимися входами(соответственно выходами) H .
- $\Pi^{(i)}$, $i=1,2,3$ - плоская прямоугольная решетка(ППР), входами(выходами) которой являются: вершины, лежащие на верхней(соответственно нижней) ее стороне при $i=1$; все вершины граничного прямоугольника при $i=2$; все вершины ППР при $i=3$.



9. Вложения полных k-ичных (k=2,3) деревьев в плоские прямоугольные решетки (ППР) минимальной высоты

- Перегрузка транзитной вершины(ребра) – число проходящих через них транзитных цепей.
- Вложение с перегрузкой вершин и ребер равной 1 – гомеоморфное вложение, а вложение в ППР с перегрузкой вершин равной 2 и перегрузкой ребер равной 1 – схемы из коммутационных элементов.
- $h_a^{(i)}(G)(A_a^{(i)}(G))$ - минимальная высота(соответственно площадь) ППР $\Pi^{(i)}$, $i=1,2,3$, в которую возможно вложение сети G с перегрузкой вершин a , $a=1,2$ и перегрузкой ребер 1.
- Для полного k-ичного n ярусного дерева $D_k(n)$, входом которого является корень, а выходами – листья, справедливы соотношения:

$$h_1^{(i)}(D_2(n)) = h_2^{(i)}(D_2(n)) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, i = 1, 2, 3;$$

$$h_1^{(i)}(D_3(n)) = h_2^{(i)}(D_3(n)) = n + 1, i = 1, 2, 3;$$

9. Вложения полных k -ичных ($k=2,3$) деревьев в плоские прямоугольные решетки (ППР) минимальной высоты

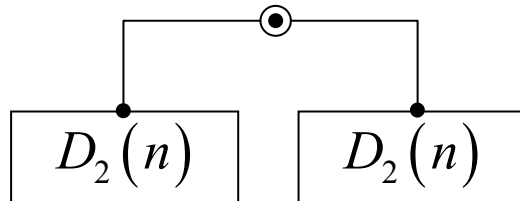
Верхняя оценка для $h_1^{(1)}(D_2(n))$. Индукцией по $n, n = 1, 2, \dots$, строится такое гомеоморфное вложение $D_2(n)$ в $\Pi^{(1)}$ высоты $\lceil n + 1/2 \rceil$, при котором в случае четного n корень дерева является крайним среди основных и транзитных вершин вложения, расположенных на верхней границе ППР.

Базис индукции: $n = 1$

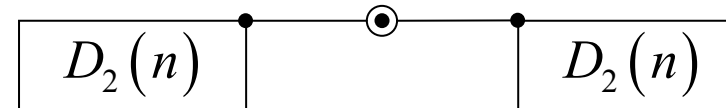


Индуктивный переход от вложения $D_2(n)$ к вложению $D_2(n+1)$:

а) $n = 2k - 1$



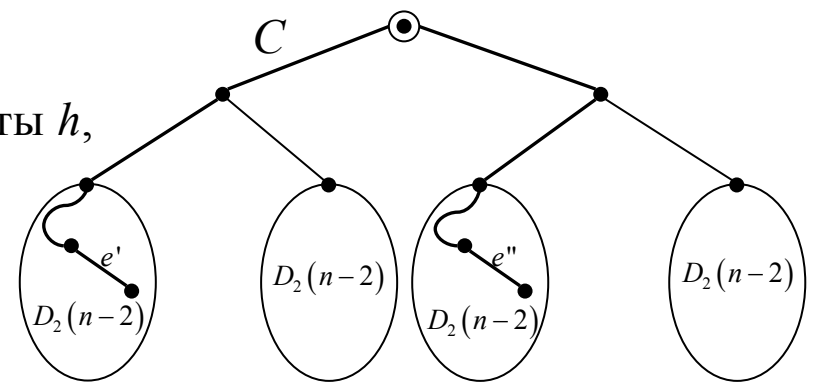
б) $n = 2k$



9. Вложения полных k -ичных ($k=2,3$) деревьев в плоские прямоугольные решетки (ППР) минимальной высоты

Нижняя оценка для $h_2^{(3)}(D_2(n))$. Пусть φ – вложение дерева $D = D_2(n)$ в решетку $A = \Pi^{(3)}$ высоты $h, h \geq 3$, v' и v'' – крайняя левая и крайняя правая среди основных или транзитных вершин φ , e' и e'' – те ребра D , φ -образы которых содержат вершины v' и v'' соответственно, а C – цепь D , которая начинается с ребра e' и заканчивается ребром e'' .

Построим вложение графа $D \setminus \{C\}$ в A в результате "освобождения" всех ребер и основных вершин, принадлежащих транзитным цепям, являющимся φ -образами ребер C , а также тех транзитных вершин, которые принадлежат только этим цепям. Полученное вложение содержит подвложение $\hat{\varphi}$ дерева $\hat{D} = D_2(n-2)$ в решетку \hat{A} высоты h , которое имеет свободную цепь \hat{C} , идущую от левой боковой стороны \hat{A} до её правой боковой стороны.



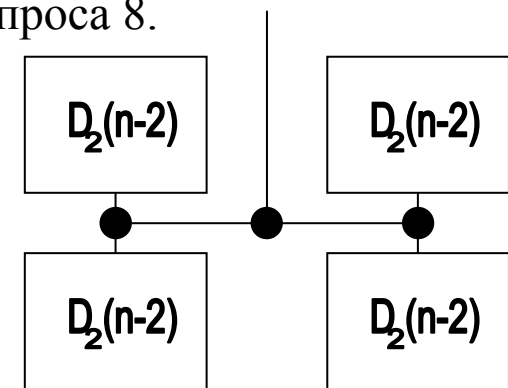
10. Асимптотика площади полных двоичных деревьев

- Справедливы следующие соотношения:

$$A_1^{(1)}(D_2(n)) = \frac{1}{2} n \cdot 2^n (1 \pm \bar{o}(1)), \quad A_2^{(1)}(D_2(n)) = \frac{1}{2} n \cdot 2^n (1 \pm \bar{o}(1)),$$

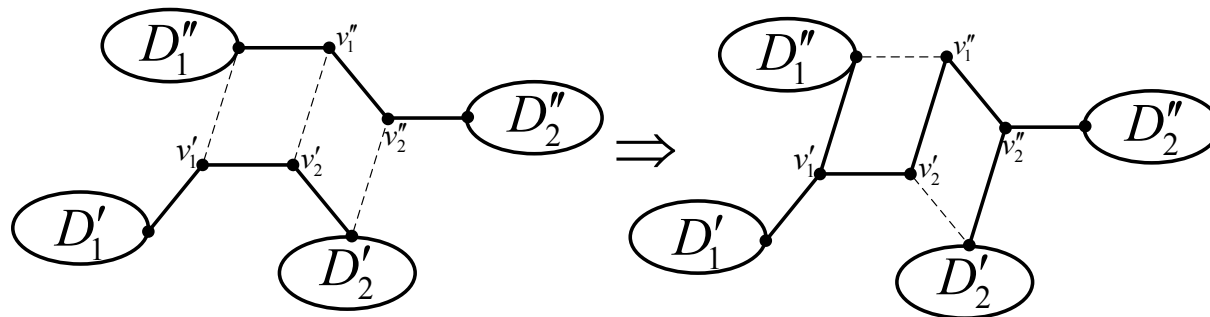
$$A_2^{(2)}(D_2(n)) = \frac{1}{4} n \cdot 2^n (1 \pm \bar{o}(1)), \quad C'' 2^n \leq A_1^{(3)}(D_2(n)) \leq A_2^{(3)}(D_2(n)) \leq C'' 2^n.$$

- Верхние оценки для первой группы асимптотических равенств получаются индуктивным построением вложения $D_2(n)$ в решетку высоты $\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1\right)$ и длины 2^n с использованием техники вопроса 9. Нижние оценки устанавливаются аналогично нижним оценкам вопроса 8.
- Верхняя оценка для $A_2^{(2)}(D_2(n))$ получается на основе вложения $D_2(n)$ в $\Pi^{(1)}$ путем «перебрасывания» половины листьев на верхнюю сторону решетки и «сжатия» её по длине аналогично конструкции из вопроса 8.
- Нижняя оценка для $A_2^{(3)}(D_2(n))$ очевидна, а верхняя оценка для $A_1^{(3)}(D_2(n))$ получается индуктивным построением H-вложения дерева $D_2(n)$ в квадратную ППР со стороной $d(n)$ так, что $d(n) = 2d(n-2) + 1$ (указанное вложение называется H-деревом).



10. Гомеоморфные вложения полных двоичных деревьев в гиперкубы

- Минимальная размерность единичного куба, в который можно гомеоморфно вложить $D_2(n)$ равна $(n+1)$.
- Если дерево $D_2(n)$ гомеоморфно вложено в куб B^R , то $2^{n+1} - 1 \leq 2^R$ и, следовательно, $R \geq n + 1$. Верхняя оценка доказывается изоморфным вложением дерева \hat{D}_n , которое получается из $D_2(n)$ подразбиением прикорневого ребра, индуктивным построением на основе очевидного базиса индукции при $n=1$ и индуктивного перехода от вложения деревьев D', D'' вида \hat{D}_{n-1} в подкубы размерности n куба B^{n+1} к вложению дерева D_n в этот куб следующим образом:



$D'_i, D''_i, i = 1, 2,$ –
 поддеревья вида $D_2(n-2)$
 деревьев D' и D''
 соответственно.



11. Двухуровневый логический синтез и ДНФ

$$\text{ДНФ} : F = C_1 + \dots + C_k = f(x_1, \dots, x_n),$$

где "+" = "∨", ⇔

$$F = \{C_1, \dots, C_k\} \text{ — покрытие } f \text{ в } B^n.$$

Система ДНФ допускает естественное вложение в ПЛМ.



11. Двухуровневый логический синтез и ДНФ

- Подкуб (элементарная конъюнкция) C куба B^n – импликанта $f \Leftrightarrow C \subseteq f (N_C \subseteq N_f)$. При этом буква $j = x_i^\sigma, j \in C$, считается простой буквой \Leftrightarrow подкуб $C \setminus \{j\}$ не является импликантой f .
- Импликанта C ФАЛ f – простая импликанта, если все её буквы простые.
- Подкуб C_i – избыточный подкуб ДНФ $F \Leftrightarrow F \setminus \{C_i\}$ не является покрытием f .
- Покрытие F считается избыточным (тупиковым) \Leftrightarrow все его подкубы избыточные (соответственно простые и избыточные).



11. Двухуровневый логический синтез и ДНФ

- Для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ и подкуба $C, C \subseteq B^n, f_C$ - результат подстановки в f фиксированных в C значений БП x_1, \dots, x_n .
- Свойства:
 - $C \cdot f_C = C \cdot f$;
 - $C \subseteq f \Leftrightarrow f_C \equiv 1$;
 - $f = x_i f_{x_i} + \overline{x_i} f_{\overline{x_i}}$ (разложение Шеннона);
 - если $F = \{C_1, \dots, C_n\}$ – покрытие f , то $F_C = \{(C_1)_C, \dots, (C_k)_C\}$ - покрытие f_C .




11. Двухуровневый логический синтез и ДНФ

- Набор $F=(f,d,r)$, где $F: B^n \rightarrow \{0,1,*\}$ и $f = ("1")^{-1}$, $d = ("*")^{-1}$, $r = ("0")^{-1}$ – не всюду определенная ФАЛ. При этом $f+d+r=B^n$, $f \cap d = f \cap r = d \cap r = \emptyset$ и ФАЛ g – доопределение $F \Leftrightarrow f \subseteq g \subseteq f+d$.
- Подкуб C (покрытие F) считается простым подкубом (соответственно неизбыточным покрытием) F , если C – простой подкуб $f+d$ (соответственно неизбыточное покрытие доопределения f).
- Проверка на простоту и неизбыточность:
 - буква $j \in C$, где $C \subseteq f+d$, не простая в C для $F \Leftrightarrow (C)_j \subseteq f+d \Leftrightarrow (f+d)_{((C)_j)} \equiv 1$
 - если $G=\{C_1, \dots, C_n\}$ – покрытие F , а D – покрытие d , то C_i избыточно $\Leftrightarrow C_i \subseteq G^{(i)} \Leftrightarrow C_i \subset (f \setminus C_i) \cup d \Leftrightarrow G_{C_i}^{(i)} \equiv 1$, где $G^{(i)} = (G \setminus C_i) \cup D$.



11. Основные подходы к двухуровневой оптимизации

- ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ – (+)-унарна ((-)-унарна) по $x_i \Leftrightarrow f$ монотонно не убывает (соответственно не возрастает) по x_i .
- Унарная ФАЛ, то есть ФАЛ унарная по каждой БП, имеет единственную тупиковую ДНФ – её сокращенную ДНФ.



12. Многоуровневый логический синтез и связанные с ним представления

- Скобочные формы – формулы с поднятыми отрицаниями в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, построенные с использованием тождеств коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности на базе ДНФ.
- BDD Σ от БП x_1, \dots, x_n – ориентированный ациклический граф с 1 истоком и двумя стоками, в котором стоки помечены символами «0» и «1», а любая другая вершина имеет пометку $x_i, 1 \leq i \leq n$, и две исходящих дуги с пометками «0» и «1». Считается, что BDD Σ реализует БФ f – БФ проводимости от истока Σ к её стоку с пометкой «1» (заметим, что БФ проводимости от истока Σ к её стоку с пометкой «0» равна \bar{f}).



12. Многоуровневый логический синтез и связанные с ним представления

- BDD представляет собой, по существу, специальный класс контактных схем (КС) – класс ациклических КС из ориентированных контактов с одним истоком – входом и двумя стоками – выходами, в которой из каждой невыходной вершины исходит два противоположных контакта.
- Операции приведения BDD:
 - удаление вершины, у которой обе исходящие дуги идут в одну и ту же вершину;
 - слияние (отождествление) двух вершин, обладающих тем свойством, что БФ проводимости от каждой из них к выходу “1” BDD равны.




12. Многоуровневый логический синтез и связанные с ним представления

- Приведенная BDD – BDD, к которой применены все возможные операции удаления и слияния.
- Упорядоченная BDD (OBDD) от БП x_1, \dots, x_n – BDD, в которой на любом пути от входа к выходам переменные встречаются в одном и том же «глобальном» порядке, причем каждая БП встречается не более 1 раза. OBDD представляет собой, по существу, КС, построенную по методу каскадов.




13. Многоуровневый логический синтез и связанные с ним представления

- Порядок переменных может очень сильно влиять на сложность получаемой OBDD для заданной БФ. Так для мультиплексорной БФ $\mu_k(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_{2^k-1})$ асимптотика этой сложности варьируется от $2n$ до $\frac{2^{n+1}}{n}$, где $n = k + 2^k$.
- Проблема выбора для заданной БФ оптимального по сложности получаемой OBDD порядка БП является NP-трудной.




13. Основные подходы к многоуровневой оптимизации

- Технологически независимое описание многоуровневой комбинационной схемы представляет собой логическую сеть, то есть, по существу, схему из функциональных элементов (СФЭ) в базисе из всех БФ. При этом БФ, вычисляемые в вершинах сети, могут быть заданы таблицами, ДНФ, BDD или аналогичными сетями.




13. Основные подходы к многоуровневой оптимизации

- Оптимизация сети проводится, обычно, в два этапа:
 - оптимизация структуры сети;
 - оптимизация вершин сети (локальная оптимизация).
- Основной операцией, используемой при оптимизации структуры сети, является операция декомпозиции и её частные случаи (экстракция, факторизация, подстановка и др.), а также обратные к ним операции. Имеется много различных эвристических критериев целесообразности применения тех или иных структурных операций.




13. Основные подходы к многоуровневой оптимизации

- Распространенным вариантом декомпозиции БФ $f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ является ее представление в виде суперпозиции $f = h(x_1, \dots, x_m, g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_l(y_1, \dots, y_m))$, где $l = \lceil q \rceil$, а q – число различных БФ от БП x_1, \dots, x_n , которые получаются из БФ f при всевозможных подстановках констант вместо БП y_1, \dots, y_m .
- После выбора структуры сети осуществляется оптимизация функций, связанных с её вершинами. Основным инструментом такой оптимизации является выделение реальной области определенности этих функций с учетом особенностей их совместного поведения и использования техники *don't care*.




13. Основные подходы к многоуровневой оптимизации

- Кроме того, на каждом из этапов оптимизации часто используется техника булевского деления, то есть представления БФ f в виде $f = g \cdot k \vee r$, где g – некоторое «частное», а r – «остаток». При этом в случае так называемого алгебраического деления, когда БФ g , h , r не имеют общих существенных БП возможно эффективное применение алгебраических методов.



13. Основные подходы к многоуровневой оптимизации

- После оптимизации сети выполняется её привязка к библиотечному базису (mapping), то есть замена каждой внутренней вершины сети той схемой, построенной из элементов базиса, которая реализует БФ, связанную с этой вершиной. В результате получается логическая схема, которая направляется на следующие этапы проектирования – размещение и трассировку.

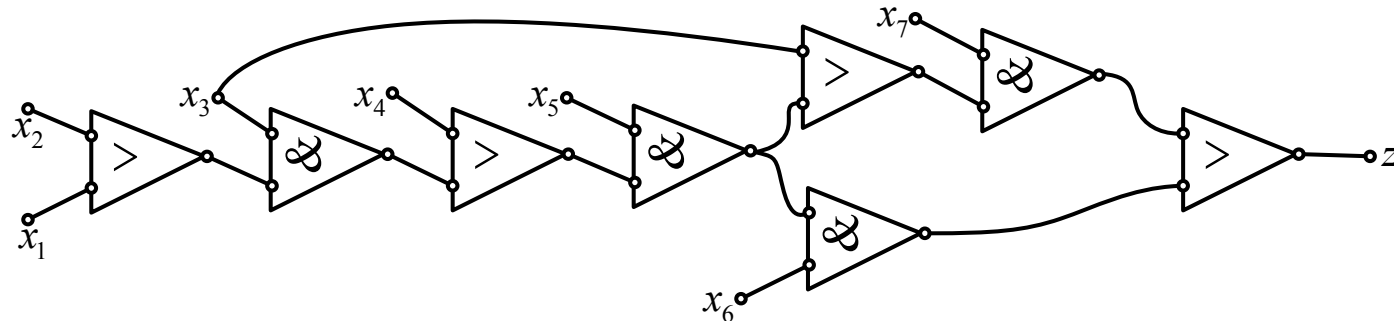


14. Анализ задержек и временная оптимизация схем

- Временной анализ схем на транзисторном уровне на основе решения систем дифференциальных уравнений с частными производными (см. вопрос 3): а) производится путем численного решения на ЭВМ с помощью пакета программ типа SPICE; б) реально возможен для небольших схем (библиотечных элементов).
- Для логико-временного анализа комбинационных схем из библиотечных элементов используется, обычно, модель «взвешенной» глубины СФЭ над заданным базисом, которая основана на предположении о том, что переключение выхода элемента связано, как правило, с переключением одного из его входов при фиксированных значениях остальных. В рамках этой модели задержка переключения элемента может зависеть от номера переключаемого входа, типа его переключения (с 1 на 0 и с 0 на 1) и может быть различной при различных наборах значений фиксированных входов. Кроме того, считается, что эта задержка прямо пропорциональна суммарной емкости узлов, присоединенных к выхода элемента.
- Статический анализ схемы на базе указанной модели предполагает поиск (статических) критических путей, то есть цепей из последовательно соединенных элементов с максимальной суммарной глубиной. Трудоемкость такого поиска зависит от структуры схемы и может очень быстро расти с ростом её размерности. Статический анализ дает, как правило, завышенную (пессимистическую) оценку задержки схемы.

14. Анализ задержек и временная оптимизация схем

- Среди статических критических путей схемы присутствуют «ложные» критические пути, по которым изменение значения с входов схемы никогда не проходит на её выход по данному пути от его начала и до конца. Так для СФЭ вида



имеется единственный максимальный по длине путь, проходящий через 7 элементов, который никогда не «срабатывает» целиком, так как при $X_3=0$ он «обходится» одним из путей длины 6, а при $X_3=1$ – другим путем длины 6. Таким образом, задержка данной схемы не больше 6, в то время как её глубина равна 7. Задача отбора ложных критических путей – важная задача временного анализа.

- Временная оптимизация комбинационных схем необходима, обычно, в тех случаях, когда их задержка не соответствует требованиям заказчика (не укладывается в заданную тактовую частоту):
 - оптимизация по глубине деревьев из ассоциативных и коммутативных элементов;
 - дублирование вершин-элементов для уменьшения степени ветвления их выходов;
 - перестройка схемы (ресинтез).



15. Знакомство с системой логического синтеза СБИС SIS. Форматы представления данных.

- Понятие о логическом синтезе. Общие сведения о системе SIS. Основные возможности системы.
- Форматы представления данных в SIS: .pla, .blif, .eqn (подробный разбор формата .blif).
- Формат файлов библиотеки .genlib.
- Привязка к библиотеке (мэппинг) и пример её простой реализации.



16. Алгоритмы логической оптимизации в SIS.

- Описание двухуровневой и многоуровневой модели представления функций.
- Алгоритм двухуровневой оптимизации Espresso.
- Оптимизационные скрипты в SIS (на примере скрипта `script.algebraic`).



17. Асинхронный синтез в SIS.

- Сети Петри (описание модели и особенности функционирования).
- Моделирование различных асинхронных систем при помощи сетей Петри.
- Основные характеристики сетей Петри: ограниченность, живучесть, обратимость (на примере конкретных схем).
- Понятие асинхронной схемы, сигналы и формат представление асинхронных схем (формат ASTG) в системе SIS.
- Переход от схемы с задержками к ASTG представлению.