

Лекция 1. Конечнзначные функции.  
Элементарные  $k$ -значные функции. Способы задания  $k$ -значных функций: таблицы, формулы, 1-я и 2-я формы, полиномы. Полнота. Теорема о полноте системы Поста. Функция Вебба.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

Лекции по курсу «Дискретные модели», 1-й курс,  
магистратура факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

## Функции $k$ -значной логики

Пусть  $k \geq 2$ ,  $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется **функцией  $k$ -значной логики**, или  **$k$ -значной функцией**, если

$$f : E_k^n \rightarrow E_k, \quad n \geq 1.$$

Множество всех функций  $k$ -значной логики обозначим как  $P_k$ , множество всех функций  $k$ -значной логики, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , обозначим как  $P_k^{(n)}$ .

При  $k = 2$  функции называются также *функциями алгебры логики*, или *булевыми функциями*, при  $k \geq 3$  — *функциями многозначной логики*, или *многозначными функциями*.

Равенство функций  $k$ -значной логики (при  $k \geq 2$ ) рассматривается с точностью до несущественных (фиктивных) переменных.

# Существенные и несущественные переменные

Переменная  $x_i$  называется **существенной** для функции  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ , если найдутся такие элементы  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_k$ , что функция одной переменной  $x_i$

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

не является постоянной величиной.

Другими словами, переменная  $x_i$  является существенной, если все другие переменные можно так определить, что полученная новая функция одной этой переменной  $x_i$  принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Несущественные переменные можно удалять и добавлять.

# Равенство функций

Функции  $f \in P_k$  и  $g \in P_k$  называются **равными**, если при помощи конечного числа удалений или добавлений несущественных переменных их можно сделать совпадающими.

Функции  $f \in P_k$  и  $g \in P_k$  называются **конгруэнтными**, если равные им функции отличаются только именами переменных.

**Примеры.**

1. Функции  $f_1(x) = 0$  и  $f_2 = 0$  равны.
2. Функции  $g(x) = x$  и  $h(y) = y$  конгруэнтны.

# Применение

Конечнозначные функции могут применяться для построения моделей при решении прикладных задач, в которых можно выделить исходное множество, состоящее из конечного числа элементов.

Проводятся исследования, относящиеся к разработке физических схем на многозначной основе; существуют промышленные образцы, основанные на многозначных логиках.

# Таблица значений функции

Как можно задавать функции  $k$ -значных логик?

1. Таблицы значений.

Упорядочим все наборы множества  $E_k^n$  в *лексико-графическом*, или *алфавитном* порядке (в алфавите  $0, 1, \dots, k-1$ ), и сопоставим каждому набору значение функции на нем.

$x_1$	$\dots$	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\dots$	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	$\dots$	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
	$\dots$			
0	$\dots$	0	$k-1$	$f(0, \dots, 0, k-1)$
	$\dots$			
$k-1$	$\dots$	$k-1$	0	$f(k-1, \dots, k-1, 0)$
	$\dots$			
$k-1$	$\dots$	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \dots, k-1, k-2)$
$k-1$	$\dots$	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \dots, k-1, k-1)$

# Число функций от $n$ переменных

**Теорема 1.** Пусть  $k \geq 2$ . При  $n \geq 1$  верно  $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$ .

**Доказательство.**

Рассмотрим произвольную функцию  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^{(n)}$ .

В ее таблице  $k^n$  строк.

В каждой строке вне зависимости от других строк записано ее значение на этом наборе из  $k$  возможных.

Поэтому  $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$ .



# Элементарные функции

## 2. Формулы.

Элементарные функции  $k$ -значной логики ( $k \geq 3$ ).

$n = 0$ :

константы  $0, 1, \dots, k - 1$ .

$n = 1$ :

$x$	$x$	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k - 1$	0
1	1	2	$k - 2$	$k - 1$
...				
$k - 2$	$k - 2$	$k - 1$	1	2
$k - 1$	$k - 1$	0	0	1

$x$  — тождественно  $x$ ;

$\bar{x} = x + 1(\text{mod } k)$  — отрицание Поста  $x$ ;

$\sim x = (k - 1) - x$  — отрицание Лукасевича  $x$ ;

$-x = k - x(\text{mod } k)$  — минус  $x$ .



# Элементарные функции

Характеристические функции выделенного значения  $J_i(x)$ ,  $j_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ :

$$J_i(x) = \begin{cases} k - 1, & x = i; \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i; \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

# Элементарные функции

$n = 2$ :

$x + y \pmod k$ ,  $x - y \pmod k$ ,  $x \cdot y \pmod k$  — сложение, вычитание и умножение по модулю  $k$ ;

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y; \\ y, & x > y. \end{cases} \quad \text{— минимум из } x \text{ и } y;$$

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y; \\ y, & x < y. \end{cases} \quad \text{— максимум из } x \text{ и } y;$$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y; \\ 0, & x < y. \end{cases} \quad \text{— усеченная разность};$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} k - 1, & x \leq y; \\ (k - 1) - (x - y), & x > y. \end{cases} \quad \text{— импликация.}$$

**обобщения:**

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \dots, x_n));$$

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \dots, x_n));$$

$$x^m = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_m \quad \text{— степень.}$$

# Элементарные функции

Как функции алгебры логики обобщаются на функции многозначных логик?

$n$	$P_2$	$P_k, k \geq 3$	пояснения
$n = 0$	0, 1	0, 1, ..., $k - 1$	константы
$n = 1$	$x$ $\bar{x}$	$x$ $\bar{x}, \sim x$	тождественная функция отрицание
$n = 2$	$x \& y$ $x \vee y$ $x \oplus y$ $x \rightarrow y$	$\min(x, y)$ $\max(x, y)$ $x + y \pmod k$ $x \rightarrow y$	конъюнкция или минимум дизъюнкция или максимум сложение по модулю $k$ импликация

В связи с расширением исходного множества значений появляются элементарные функции, не имеющие явного прообраза в двузначном случае:  $-x$ ,  $J_i(x)$ ,  $j_i(x)$ ,  $x \dot{-} y$ .

# Формула

Введем понятия **формулы** и **функции, задаваемой формулой**.

Пусть  $A \subseteq P_k$ , причем в множестве  $A$  каждая функция имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

**Формула** над множеством  $A$  определяется по индукции.

1. *Базис индукции.* Если  $f$  — обозначение  $n$ -местной функции из  $A$  и  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  — (не обязательно различные) переменные, то выражение  $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  — формула.
2. *Индуктивный переход.* Если  $F_1, \dots, F_n$  — уже построенные формулы или переменные и  $f$  — обозначение  $n$ -местной функции из  $A$ , то выражение  $f(F_1, \dots, F_n)$  — формула.
3. Других формул нет, т.е. каждая формула построена либо по базису индукции, либо по индуктивному переходу.

# Формула

**Пример.** Пусть  $A \subseteq P_5$  — множество элементарных функций.

Тогда

$$F_1 = x^2$$

формула по базису индукции для функции  $x^2 \in A$  и переменной  $x$ ;

$$F_2 = 3$$

формула по базису индукции для функции  $3 \in A$ ;

$$F_3 = 3 \cdot x^2$$

формула по индуктивному переходу для уже построенных формул  $F_1$ ,  $F_2$  и функции  $x \cdot y \in A$ ;

$$F_4 = \sim (3 \cdot x^2)$$

формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы  $F_3$  и функции  $\sim x \in A$ ;  
и т.д.

## Функция, определяемая формулой

Каждая формула над множеством  $A \subseteq P_k$  задает некоторую функцию  $k$ -значной логики.

Функция  $f_F$ , задаваемая формулой  $F$ , определяется по индукции.

- Базис индукции.* Если  $F = x_i$ , где  $x_i$  — переменная, то  $f_F = x_i$ , т.е. функция  $f_F$  тождественно равна переменной  $x_i$ .
- Индуктивный переход.* Если  $F(x_1, \dots, x_n) = f(F_1, \dots, F_n)$ , где  $F_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}), \dots, F_n(x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n})$  — формулы или переменные,  $x_{1,1}, \dots, x_{n,m_n} \in \{x_1, \dots, x_n\}$ , и  $f$  — обозначение  $n$ -местной функции из  $A$ , то

$$f_F(x_1, \dots, x_n) = f(f_{F_1}(x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}), \dots, f_{F_n}(x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n})).$$

Здесь мы пользуемся тем, что  $f$  обозначает какую-то функцию из  $A$ .

# Функция, определяемая формулой

**Пример.** Найдем функцию  $f_{F_4}(x) \in P_5$ , которая задается формулой  $F_4$ :

$x$	$x^2$	$3 \cdot x^2$	$\sim (3 \cdot x^2)$
0	0	0	4
1	1	3	1
2	4	2	3
3	4	2	3
4	1	3	1

Функция  $f_{F_4}$ , определяемая формулой  $F_4$ , записана в самом правом столбце.

# Эквивалентные формулы

Формулы  $F_1$  и  $F_2$  называются **эквивалентными**, или **тождественными**, если они задают равные функции, т.е. функции  $f_{F_1}$  и  $f_{F_2}$  равны.

Обозначение эквивалентных формул:  $F_1 = F_2$

Верны следующие свойства:

- 1) коммутативность связок  $\cdot$ ,  $+$ ,  $\min$ ,  $\max$ ;
- 2) ассоциативность связок  $\cdot$ ,  $+$ ,  $\min$ ,  $\max$ ;
- 3) дистрибутивность  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .

И многие другие.



# Эквивалентные формулы

## Примеры.

1. Докажем тождество:  $-(\bar{x}) = \sim x$ .

$$-(\bar{x}) = -(x + 1) = (k - 1) - x = \sim x.$$

2. Докажем тождество:  $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$ .

$$\begin{aligned} & \sim \max(\sim x, \sim y) = \\ & = (k - 1) - \begin{cases} (k - 1) - x, & (k - 1) - x \geq (k - 1) - y; \\ (k - 1) - y, & (k - 1) - x < (k - 1) - y; \end{cases} = \\ & = \begin{cases} x, & x \leq y; \\ y, & x > y; \end{cases} = \min(x, y). \end{aligned}$$

# 1-я форма

**Теорема 2 (о 1-й форме).** Пусть  $k \geq 2$ . Каждая функция  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  может быть задана формулой следующего вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \max_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min(J_{\sigma_1}(x_1), \dots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma)).$$

**Доказательство.**

Рассмотрим произвольный набор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_k^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \max_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min(J_{\sigma_1}(\alpha_1), \dots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma)) = \\ &= \max(0, \dots, 0, f(\alpha), 0, \dots, 0) = f(\alpha). \end{aligned}$$

□

# 1-я форма

**Пример.**

Пусть  $f(x) = \bar{x} \in P_3$ :

$x$	$f$
0	1
1	2
2	0

Найдем ее 1-ю форму:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), 2), \min(J_2(x), 0)) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)). \end{aligned}$$

## 2-я форма

**Теорема 3 (о 2-й форме)** Пусть  $k \geq 2$ . Каждая функция  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  может быть задана формулой следующего вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \dots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

## 2-я форма

**Пример.** Пусть  $g(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$ :

$x$	$x^2$	$x + x^2$	$g$
0	0	0	0
1	1	2	3
2	0	2	3
3	1	0	0

Найдем ее 2-ю форму:

$$\begin{aligned}g(x) &= j_0(x) \cdot g(0) + j_1(x) \cdot g(1) + j_2(x) \cdot g(2) + j_3(x) \cdot g(3) = \\ &= j_0(x) \cdot 0 + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot 0 = 3j_1(x) + 3j_2(x).\end{aligned}$$

# Моном

**Мономом** назовем формулу вида

$$x_{i_1}^{s_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}^{s_r},$$

где все переменные различны и  $s_1, \dots, s_r \geq 1$ ,  $r \geq 1$ , или константу 1.

# Полином

**Полиномом по модулю  $k$**  назовем формулу вида

$$c_1 K_1 + \dots + c_l K_l,$$

где  $K_i$  — различные мономы и  $c_i \in E_k \setminus \{0\}$  — коэффициенты,  $i = 1, \dots, l$ , или константу 0.

Будем полагать, что в полином можно добавлять слагаемые с нулевыми коэффициентами. Примем, что полученное выражение (формула) также является полиномом. Такой полином будем считать совпадающим с полиномом без всех слагаемых с нулевыми коэффициентами.

# Полиномы

**Теорема 4 (о представлении функций  $k$ -значной логики полиномами)** Пусть  $k \geq 2$ . Каждая функция  $k$ -значной логики  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  задается полиномом по модулю  $k$  тогда и только тогда, когда  $k$  — простое число.



# Полиномы

**Доказательство.**

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ . Запишем ее во 2-й форме:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \dots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

Заметим, что при  $a \in E_k$  верно  $j_a(x) = j_0(x - a)$ . Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_0(x_1 - \sigma_1) \cdot \dots \cdot j_0(x_n - \sigma_n) \cdot f(\sigma).$$

# Полиномы

## Доказательство.

1. Если  $k$  — простое число, то по малой теореме Ферма  $a^{k-1} = 1 \pmod{k}$  при  $1 \leq a \leq k-1$ .

Тогда  $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$  и

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} (1 - (x_1 - \sigma_1)^{k-1}) \cdot \dots \cdot (1 - (x_n - \sigma_n)^{k-1}) \cdot f(\sigma). \end{aligned}$$

Затем перемножаем скобки по свойствам дистрибутивности, коммутативности, ассоциативности и приводим подобные слагаемые. Получаем полином по модулю  $k$  для функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Существование полинома по модулю  $k$  для каждой  $k$ -значной функции при простых  $k$  доказано.

# Полиномы

**Доказательство.**

2. Пусть  $k$  — составное число. Тогда  $k = k_1 \cdot k_2$ , где  $k_1 \geq k_2 > 1$ .

Докажем от противного, что в этом случае функция  $j_0(x)$  не задается полиномом по модулю  $k$ .

# Полиномы

**Доказательство.**

Пусть функция  $j_0(x)$  задается полиномом по модулю  $k$ :

$$j_0(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

$c_s, c_{s-1}, \dots, c_1, c_0 \in E_k$  — коэффициенты,  $c_s \neq 0$ .

Тогда

$$j_0(0) = c_0 = 1;$$

$$j_0(k_2) = c_s k_2^s + c_{s-1} k_2^{s-1} + \dots + c_1 k_2 + 1 = 0.$$

# Полиномы

**Доказательство.**

Получаем:

$$k_2 \cdot (c_s k_2^{s-1} + c_{s-1} k_2^{s-2} + \dots + c_1) = k - 1 \pmod{k}.$$

Левая часть делится на  $k_2$  и число  $k$  делится на  $k_2$ , поэтому **число  $k - 1$  обязано делиться на  $k_2$**  (где  $k_2 > 1$ ) — противоречие.

Т.е. при составных  $k$  никакой полином по модулю  $k$  не задает функцию  $j_0(x)$ .



# Полиномиальные функции

Функция  $f \in P_k$  называется **полиномиальной**, если она задается полиномом по модулю  $k$ .

Элементарные функции

$$x;$$

$$\bar{x} = x + 1;$$

$$\sim x = (k - 1) - x = (k - 1)x + (k - 1);$$

$$-x = k - x = (k - 1)x;$$

$$x + y;$$

$$x - y = x + (k - 1)y;$$

$$x \cdot y;$$

$$x^m$$

являются полиномиальными при всех значениях  $k$  — и при простых, и при составных.

# Неполиномиальные функции при составных $k$

## Элементарные функции

$$j_i(x), i \in E_k;$$

$$J_i(x), i \in E_k;$$

$$\max(x, y);$$

$$\min(x, y);$$

$$x \dot{-} y;$$

$$x \rightarrow y$$

являются полиномиальными при простых  $k$  и **не являются** полиномиальными при всех составных  $k$  (покажем далее).

# Полиномы

Множество всех  $k$ -значных функций, задающихся полиномами по модулю  $k$ , обозначается как  $Pol_k$ .

## Следствие 4.1.

*Если  $k$  — простое число, то  $Pol_k = P_k$ ;  
если  $k$  — составное число, то  $Pol_k \neq P_k$ .*

## Вопросы:

Как строить полиномы для  $k$ -значных функций при простых  $k$ ?

Как выяснить, задается ли полиномом заданная  $k$ -значная функция, если  $k$  — составное число?



## Если $k$ — простое число

Способы построения полиномов  $k$ -значных функций при простых  $k$ :

1. способ из доказательства теоремы 4 — по 2-й форме;
2. метод *неопределенных коэффициентов*.

## Если $k$ — составное число

Если  $k$  — составное число, то можно применять метод *неопределенных коэффициентов* для выяснения, задается ли данная  $k$ -значная функция полиномом по модулю  $k$ .

# Если $k$ — составное число

## Примеры.

1. Пусть  $f(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4$ .

Выясним, задается ли функция  $f(x) \in P_4$  полиномом по модулю 4 методом неопределенных коэффициентов.

Предположим, что функция  $f(x)$  задается полиномом по модулю 4.

Сначала построим таблицу степеней  $x^s$ :

$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	1

Так как  $x^4 = x^2$ , степени в полиноме по модулю 4 можно записывать только до третьей.

## Если $k$ — составное число

Тогда

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где  $a, b, c, d \in E_4$  — неизвестные коэффициенты.

Для определения коэффициентов составим систему уравнений по значениям данной функции  $f(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4$ :

$$f(0) = d = 0;$$

$$f(1) = a + b + c + d = 3;$$

$$f(2) = 2c + d = 3;$$

$$f(3) = 3a + b + 3c + d = 0.$$

## Если $k$ — составное число

Из первого и третьего уравнения получаем:

$$2c = 3.$$

Подставляя все возможные значения  $c \in E_4$ , выясняем, что это равенство не выполняется ни при каких значениях  $c \in E_4$ :

$$2 \cdot 0 = 0; \quad 2 \cdot 1 = 2; \quad 2 \cdot 2 = 0; \quad 2 \cdot 3 = 2.$$

Следовательно, исходная система не имеет решений (по модулю 4), откуда

$$f(x) = J_1(x) + J_2(x) \notin Pol_4.$$

## Если $k$ — составное число

2. Пусть  $g(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) \in P_4$ .

Аналогично выясним, задается ли функция  $g(x) \in P_4$  полиномом по модулю 4.

Тогда

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где  $a, b, c, d \in E_4$  — неизвестные коэффициенты.

Составляем систему уравнений:

$$g(0) = d = 0;$$

$$g(1) = a + b + c + d = 2;$$

$$g(2) = 2c + d = 2;$$

$$g(3) = 3a + b + 3c + d = 0.$$

## Если $k$ — составное число

Из первого и третьего уравнений получаем:

$$2c = 2, \quad c = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a + b &= 1; \\ 3a + b &= 1. \end{aligned}$$

Далее

$$a = 0, \quad b = 1.$$

Следовательно, функция  $g(x)$  задается полиномом по модулю 4, и один из ее полиномов по модулю 4 найден:

$$g(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) = x^2 + x \in Pol_4.$$

# Операция замыкания

Пусть  $A \subseteq P_k$  — множество  $k$ -значных функций.

**Замыканием** множества  $A$  называется множество всех функций, определяемых формулами над множеством  $A$ .  
Обозначение:  $[A]$ .

Если  $A = [A]$ , то множество  $A$  называется **замкнутым классом**.

**Примеры:**  $\emptyset$ ,  $P_k$ ,  $Pol_k$ .



# Полные системы

Если  $[A] = P_k$ , то множество  $A$  называется **полной системой**.

**Примеры.**

1.  $\{0, 1, \dots, k-1, J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), \max(x, y), \min(x, y)\}$  — система 1-й формы.
2.  $\{0, 1, \dots, k-1, j_0(x), j_1(x), \dots, j_{k-1}(x), x+y, x \cdot y\}$  — система 2-й формы.
3.  $\{0, 1, \dots, k-1, x+y, x \cdot y\}$ , если  $k$  — простое число, — система полиномов.

# Система Поста

**Теорема 5.** Пусть  $k \geq 3$ . Система Поста  $\{\bar{x}, \max(x, y)\}$  является полной системой в  $P_k$ .

**Доказательство.** Построим формулами на системой Поста все функции из системы 1-й формы.

1. Построение констант.

$\bar{x} = x + 1$ ;  $(x + 1) + 1 = x + 2$ ; ...;  $(x + (k - 1)) + 1 = x$ . Тогда

$$\max(x, x + 1, x + 2, \dots, x + (k - 1)) = k - 1.$$

Далее  $(k - 1) + 1 = 0$ ;  $0 + 1 = 1$ ;  $1 + 1 = 2$ ; ...;

$(k - 2) + 1 = k - 1$ .

Все константы получены.

# Система Поста

**Доказательство.**

2. Построение  $J_i(x)$ ,  $i \in E_k$ .

Проверим, что

$$J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t).$$

Если  $x = i$ , то

$$k - 1 = J_i(i) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (i + t) = 1 + (k - 2) = k - 1.$$

Если  $x \neq i$ , то

$$0 = J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t) = 1 + (k - 1) = 0.$$

Все  $J_i(x)$ ,  $i \in E_k$ , получены.

# Система Поста

**Доказательство.**

3. Построение  $\min(x, y)$ .

Проверим, что

$$g_{i,a}(x) = a \cdot j_i(x) = (a + 1) + \max(J_i(x), (k - 1) - a).$$

Если  $x = i$ , то

$$a = a \cdot j_i(i) = (a + 1) + \max(J_i(i), (k - 1) - a) = (a + 1) + (k - 1) = a.$$

Если  $x \neq i$ , то

$$0 = a \cdot j_i(x) = (a + 1) + \max(J_i(x), (k - 1) - a) = (a + 1) + (k - 1) - a = 0.$$

# Система Поста

**Доказательство.**

Теперь получена каждая функция  $f(x) \in P_k^1$ , так как

$$f(x) = \max(g_{0,f(0)}(x), g_{1,f(1)}(x), \dots, g_{k-1,f(k-1)}(x)).$$

Действительно, для каждого значения  $a \in E_k$  верно

$$\begin{aligned} f(a) &= \max(g_{0,f(0)}(a), \dots, g_{a,f(a)}(a), \dots, g_{k-1,f(k-1)}(a)) = \\ &= \max(0, \dots, 0, f(a), 0, \dots, 0) = f(a). \end{aligned}$$

В частности, построена функция  $f(x) = \sim x$ .

Тогда

$$\min(x, y) = \sim \max(\sim x, \sim y).$$

Функция  $\min(x, y)$  получена.

Все функции системы 1-й формы построены формулами над функциями системы Поста. Система Поста полна.

# Функция Вебба

**Следствие 5.1.** Пусть  $k \geq 3$ . Множество, состоящее из одной функции Вебба  $V_k(x, y) = \max(x, y) + 1$ , является полной системой в  $P_k$ .

**Доказательство.** Построим из функции Вебба функции из системы Поста.

$$\bar{x} = V_k(x, x) = \max(x, x) + 1 = x + 1;$$

$$\max(x, y) = V_k(x, y) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1}.$$



# Неполиномиальность максимума

**Следствие 5.2.** Пусть  $k$  — составное число. Тогда  $\max(x, y) \notin Pol_k$ .

**Доказательство** проведем от противного. Пусть  $\max(x, y) \in Pol_k$  при некотором составном  $k$ .

Но  $\bar{x} = x + 1 \in Pol_k$ .

Тогда  $\{\bar{x}, \max(x, y)\} \subseteq Pol_k$ .

Но система Поста полна в  $P_k$ , следовательно, каждая функция из  $P_k$  задается полиномом по модулю  $k$  при составном  $k$  — противоречие.

Поэтому  $\max(x, y) \notin Pol_k$ .



# Бесконечные полные системы в $P_k$

**Следствие 5.3.** *Из каждой бесконечной полной в  $P_k$  системы можно выделить конечную полную подсистему.*

**Доказательство.** Пусть  $A \subseteq P_k$  — бесконечная полная система.

Т.к. система  $A$  полна, в ней найдутся функции такие  $g_1, \dots, g_m$ , что функция Вебба  $V_k(x, y)$  выражается формулой над ними.

Тогда подсистема  $A' = \{g_1, \dots, g_m\}$  полна в  $P_k$ .





# Задачи

1. При всех  $k \geq 2$  доказать тождества:

$$1) x \rightarrow y = \sim(x \dot{-} y); \quad 2) \min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y);$$

$$3) x \dot{-} y = x - \min(x, y); \quad 4) x \dot{-} y = \max(x, y) - y.$$

2. Записать функцию  $f \in P_k$  в 1-й и 2-й формах, если

$$1) f(x) = \min(x^2, x^3), k = 5; \quad 2) f(x) = (\sim x)^2 \dot{-} 3 \cdot x, k = 4;$$

$$3) f(x, y) = \min(x, y), k = 3; \quad 4) f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y^2, k = 4.$$

3. Записать функцию  $f \in P_k$  полиномом по модулю  $k$ , если

$$1) f(x) = J_2(x) + 3J_4(x), k = 5; \quad 2) f(x) = \max(2x, 3x), k = 5;$$

$$3) f(x, y) = \min(x^2, y^2), k = 3; \quad 4) f(x, y) = x \dot{-} y, k = 3.$$

# Задачи

4. Задается ли функция  $f \in P_k$  полиномом по модулю  $k$ , если

- 1)  $f(x) = \min(x^2, x^3)$ ,  $k = 6$ ;      2)  $f(x) = 2 \cdot j_0(x)$ ,  $k = 4$ ;  
3)  $f(x, y) = 5J_2(x) + y^3$ ,  $k = 16$ ;      4)  $f(x, y) = \min(x^2, y^2)$ ,  $k = 4$ ?

5. Задается ли функция  $f \in P_k$  полиномом по составному модулю  $k$ , если

- 1)  $f(x, y) = \min(x, y)$ ;  
2)  $f(x, y) = x \dot{-} y$ ;  
3)  $f(x, y) = (\max(x, y) - \min(x, y))^2$ ;  
4)  $f(x, y) = \min(x, y) + \max(x, y)$ ?

Конец лекции 1