ЗАДАЧИ ПО АВТОМАТАМ-РАСПОЗНАВАТЕЛЯМ

1. Построить диаграммы Мура для автоматов в алфавите $\{0,1\}$, которые допускают следующие множества:

a) все слова из множества $\{0,1\}^* \setminus \{0,1,\Lambda\}$,

b) $\{0,10\}$,

c) все слова длины 3,

d) все слова, которые начинаются словом 01,

e) все слова, которые оканчиваются словом 00,

f) все слова, которые содержат слово 110.

2. Доказать конечную автоматность следующих множеств:

a) любое конечное множество в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$;

b) любое множество вида $A^* \setminus X$, где X — конечное множество слов в алфавите A;

c) множество всех слов вида a_i^n, где $1 \leq i \leq m$;

d) множество всех слов в алфавите $\{0,1\}$, которые имеют четную длину, начинаются буквой 0 и в которых буквы 0 и 1 чередуются;

e) множество всех слов в алфавите $\{0,1\}$, которые составлены из „блоков“ 010 и 001.

3. Построив на множестве $\{0,1\}^*$ подходящие правоинвариантные отношения эквивалентности конечного индекса, доказать конечную автоматность следующих множеств:

a) $\{\Lambda\}$;

b) $\{0\}$;

c) $\{\Lambda, 0, 1\}$;

d) $\{0^n 1 :\ n = 0, 1, \ldots\}$.

4. Для любого $n \geq 2$ определить на множестве $\{0,1\}^*$ правоинвариантную эквивалентность индекса n.

5. По аналогии с правоинвариантной эквивалентностью определим на множестве A^* левоинвариантную эквивалентность: если $\bar{a} \sim \bar{b}$ и $\bar{c}$ — произвольное слово из A^*, то $\bar{c}\bar{a} \sim \bar{c}\bar{b}$.

Будет ли для левоинвариантной эквивалентности справедлив аналог теоремы 2 из лекций (о представлении произвольного конечно-автоматного множества в виде объединения некоторого количества классов левоинвариантного отношения эквивалентности конечного индекса)?

6. Определим операцию ${}^2X$ градуированного возведения в квадрат. Для произвольного множества слов X множество ${}^2X$ состоит из всех слов вида $\bar{a}\bar{a}$, где $\bar{a} \in X$.

Сохраняет ли введенная операцию конечную автоматность множеств?

7. Доказать замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения, используя операцию прямого произведения автоматов.

8. Какие множества допускают следующие недетерминированные автоматы (предварительно построить для них диаграммы Мура):

a) $Q = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}$, $f(1, q_1) = \{q_2\}$, $f(0, q_2) = \{q_2\}$, $f(1, q_2) = \{q_1, q_2\}$, $\quad F = \{q_2\}$ и $F = \{q_1\}$.

b) $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = \{q_2\}$, $f(1, q_1) = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_2) = \{q_3\}$, $f(1, q_2) = \{q_3\}$, $f(0, q_3) = \{q_3\}$, $f(1, q_3) = \{q_2, q_3\}$, $\quad F = \{q_3\}$.

c) $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}$, $f(1, q_1) = \{q_1\}$, $f(0, q_2) = \{q_2\}$, $f(1, q_2) = \{q_2, q_3\}$, $f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}$, $f(1, q_3) = \{q_1, q_3\}$, $\quad F = \{q_3\}$.

9. Для заданных недетерминированных автоматов методом детерминизации построить эквивалентный детерминированный автомат (допускающий то же самое множество слов):

a) задача 8a, оба случая;

b) $Q = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_1) = \{q_1\}$, $f(1, q_1) = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_2) = \{q_1, q_2\}$, $f(1, q_2) = \{q_1\}$, $\quad F = \{q_2\}$.

c) задача 8b.

10. Отправляясь от множеств $\{0\}$ и $\{1\}$, построить с помощью операций объединения, произведения и итерации множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат подслово 0001.

11. Пусть $\bar{a}$ — слово в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Сколько раз нужно применить операцию итерации, чтобы получить множество $A^* \setminus \{\bar{a}\}$ из множеств $\{a_1\}, \ldots, \{a_m\}$ с помощью операций объединения, произведения и итерации?

12. Пусть множество X состоит из n слов. Может ли множество $X \cdot X$ содержать n^2 слов? меньше, чем n^2 слов? меньше, чем n слов? Привести примеры.

13. Доказать регулярность следующих множеств слов в алфавите $\{0, 1\}$:

a) любое конечное множество слов;

b) дополнение (до множества $\{0,1\}^*$) к любому конечному множеству слов;

c) множество всех слов, представимых в виде произведения заданных слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$;

d) множество всех слов, содержащих в качестве подслова одно из слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$;

e) множество всех слов, которые не содержат ни одно из заданных слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$;

f) множество всех слов, длины которых имеют вид $5k+1$ или $5k+3$.

14. Для автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ построить (недетерминированный) автомат, который допускает множество $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$:

a) автомат $\mathcal{A}$: $\quad Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = q_2$, $f(1, q_1) = q_1$, $f(0, q_2) = q_2$, $f(1, q_2) = q_3$, $f(0, q_3) = q_1$, $f(1, q_3) = q_3$, $\quad F = \{q_1, q_3\}$,

автомат $\mathcal{B}$: $\quad Q = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_1) = q_1$, $f(1, q_1) = q_2$, $f(0, q_2) = q_2$, $f(1, q_2) = q_2$, $\quad F = \{q_2\}$;

b) автомат $\mathcal{A}$: $\quad Q = \{q_1, q_2\}$, $f(0, q_1) = q_1$, $f(1, q_1) = q_2$, $f(0, q_2) = q_1$, $f(1, q_2) = q_2$, $\quad F = \{q_2\}$;

автомат $\mathcal{B}$: $\quad Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $f(0, q_1) = q_2$, $f(1, q_1) = q_3$, $f(0, q_2) = q_2$, $f(1, q_2) = q_2$, $f(0, q_3) = q_3$, $f(1, q_3) = q_1$, $\quad F = \{q_2, q_3\}$.

15. Для автомата $\mathcal{A}$ построить (недетерминированный) автомат $\mathcal{C}$, у которого $D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{A})^*$:

a) автомат $\mathcal{A}$ из задачи 14a;

b) автомат $\mathcal{B}$ из задачи 14b.

16. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ — произвольные слова в алфавите A. Доказать, что в результате одновременной замены букв $a_1, \ldots, a_m$ словами $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ во всех словах множества X образуется конечно-автоматное множество.

17. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите A, Y — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через X/Y множество всех тех слов из X, длины которых являются длинами слов из Y. Доказать, что множество X/Y конечно-автоматно.

18. Пусть X — конечно-автоматное множество, $\mathrm{Rev}(X)$ — множество всех слов, обратных к словам из X (т.е. слов, прочитанных справа налево). Доказать, что множество $\mathrm{Rev}(X)$ конечно-автоматно.