Примерный вариант коллоквиума № 1
по курсу “Избранные вопросы дискретной математики”

Задача 1 (3 балла). Сколькими способами можно распределить 5 путевок на первую смену и 5 путевок на вторую смену в университетский пансионат среди группы студентов, в которой 10 девушек и 10 юношей, если каждый студент может получить не более двух путевок, но только на одну смену, и в каждую смену путевки должны получить не менее 2-х девушек и не менее 2-х юношей.

Задача 2 (3 балла). Перечислить все антицепи в кубе B^4, которые содержат набор $\alpha = (1, 1, 1, 0)$ и ширина которых равна 4.

Задача 3 (3 балла). Вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1)(+2)} C_n^k$.

Задача 4 (3 балла). При помощи производящей функции для последовательности биномиальных коэффициентов доказать тождество $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$.

Задача 5 (3 балла). Описать условный алгоритм расшифровки монотонной функции, зависящей от переменных x_1, x_2, x_3, при помощи 6 вопросов о значении функции на наборе.

Задача 6 (2 балла). Дать определение сочетания с повторениями из n по k. Чему равно число сочетаний с повторениями из n по k?

Задача 7 (2 балла). Сформулировать теорему о верхней оценке биномиального коэффициента.

Задача 8 (2 балла). Сформулировать теорему Анселя о разбиении куба B^n на цепи.

Задача 9 (4 балла). Расстоянием $dist(\alpha, \beta)$ между наборами $\alpha \in B^n$ и $\beta \in B^n$ называется число координат, в которых эти наборы отличаются. Сферой радиуса r с центром в точке $\alpha \in B^n$ называется множество $S_r(\alpha) = \{\beta \in B^n \mid dist(\alpha, \beta) = r\}$. Найти нижнюю мощностную оценку числа сфер радиуса 2, покрывающих куб B^n. Найти верхнюю оценку мощности градиентного покрытия куба B^n сферами радиуса 2.

Продолжительность работы: 1,5 часа.