Задачи для семинарских занятий

1 Основные комбинаторные объекты и числа

Пример 1.1. Сколькими способами можно распределить три билета в театр между 20 студентами, если

1) распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета;

2) распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов;

3) распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета;

4) распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов?

Решение.

1) Каждый студент может получить не более одного билета, значит, выборка без повторений. Билеты неравноценны, значит, порядок в выборке важен. Поэтому число возможных способов распределений билетов равно числу размещений без повторений из 20 по 3, т.е. $P(20,3) = (20)_3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

2) Каждый студент может получить более одного билета, значит, выборка с повторениями. Билеты неравноценны, значит, порядок в выборке важен. Поэтому число возможных способов распределений билетов равно числу размещений с повторениями из 20 по 3, т.е. $\hat{P}(20,3) = 20^3 = 8000$.

3) Каждый студент может получить не более одного билета, значит, выборка без повторений. Билеты равноценны, значит, порядок в выборке не важен. Поэтому число возможных способов распределений билетов равно числу сочетаний без повторений из 20 по 3, т.е. $C(20,3) = C_{20}^3 = \frac{(20)_3}{3!} = 1140$.

4) Каждый студент может получить более одного билета, значит, выборка с повторениями. Билеты равноценны, значит, порядок в выборке не важен. Поэтому число возможных способов распределений билетов равно числу сочетаний с повторениями из 20 по 3, т.е. $\hat{C}(20,3) = C_{20+3-1}^3 = C_{22}^3 = \frac{(22)_3}{3!} = 1540$.

1.1. Сколькими способами можно распределить

1) 4 билета в театр среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и все билеты считаются равнозначными.

2) 2 билета в театр и 2 билета на концерт среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

1.2. Найти число матриц размера $p \times q$ из нулей и единиц

1) общего вида (без особенностей);

2) верхнетреугольного вида;

3) с различными строками;

4) без нулевых строк;

5) без нулевых и единичных строк;

6) не содержащих t выделенных строк;

7) с различным числом единиц в строках;

8) без нулевых строк и нулевых столбцов.

1.3. Оценить сверху число графов $G = (V, E)$ (без петель и кратных ребер) с p вершинами

1) общего вида (без особенностей);

2) с q ребрами;

3) содержащих полный подграф с k вершинами;

4) содержащих независимое множество с k вершинами;

5) содержащих простой цикл длины k;

6) содержащих определенный подграф H;

7) являющихся двудольными графами;

8) не являющихся связными;

9) хотя бы с s компонентами связности.

1.4. 1. Оценить сверху число двухполюсных сетей $G = (V, E)$ с q ребрами.

2. Оценить сверху число двухполюсных контактных схем сложности L с переменными $x_1, \ldots, x_n$.

1.5. 1. Оценить сверху число СФЭ с переменными $x_1, \ldots, x_n$, содержащих L операций конъюнкции & или дизъюнкции $\vee$.

2. Оценить сверху число СФЭ с переменными $x_1, \ldots, x_n$, содержащих L операций отрицания $\bar{}$ и сколько угодно операций конъюнкции & и дизъюнкции $\vee$.

1.6. Сколькими способами можно представить целое число n в виде суммы k целых положительных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются различными?

1.7. Применяя задачу 1.6, найти число целочисленных решений уравнения

1) $x + y = 10$, если $x \geq -3$, $y \geq 3$;

2) $x + y + z = 5$, если $x \geq -1$, $y \geq 0$, $z \geq -2$;

3) $x + y + z = 7$, если $x \geq 0$, $y \geq 1$, $z \geq -3$;

4) $x + y + z + u = 18$, если $x \geq -3$, $y \geq 2$, $z \geq -1$, $u \geq 0$.

2 Свойства биномиальных коэффициентов и их сумм

Пример 2.1. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k$, где $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Заметим, что указанная сумма непосредственно сворачивается по формуле бинома Ньютона $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot 1^{n-k} = (a+1)^n$.

Пример 2.2. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k$.

Решение. При $k \geq 1$ верно

$$\begin{aligned} k \cdot C_n^k &= k \cdot \tfrac{n!}{k!(n-k)!} = \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \\ &= n \cdot \tfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \cdot C_{n-1}^{k-1}. \end{aligned}$$

Слагаемое при $k = 0$ обнуляется, поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Пример 2.3. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k}$.

Решение. Из формулы бинома Ньютона следует $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$, поэтому

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

Одним из методов нахождения значений комбинаторных сумм и доказательства комбинаторных тождеств является *метод производящих функций*. Для последовательности чисел $\{a_n\}$ (конечной или бесконечной) рассмотрим формальную сумму (конечную или бесконечную) $\sum a_n x^n$, где $x \in \mathbb{R}$. Если последовательность $\{a_n\}$ конечна, то эта сумма всегда определяет функцию $F(x) = \sum a_n x^n$ (являющуюся многочленом), которая называется *производящей функцией* для последовательности $\{a_n\}$. Рассмотрим примеры подсчета комбинаторных сумм и доказательства комбинаторных тождеств при помощи производящих функций.

Вернемся к примеру 2.2: найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k$.

Решение. Рассмотрим конечную последовательность биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ и ее производящую функцию $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. Из примера 2.1 следует, что $F(x) = (x+1)^n$. Функция $F(x)$ дифференцируема при $x \in \mathbb{R}$, найдем ее производную. С одной стороны, $F'(x) = ((x+1)^n)' = n(x+1)^{n-1}$. С другой стороны, $F'(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k-1}$. Подставляя в оба полученные выражения производной $F'(x)$ значение $x = 1$, получаем $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

Пример 2.4. Доказать тождество $\sum\limits_{r=0}^{k} C_n^k C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$.

Решение. Рассмотрим конечные последовательности биномиальных коэффициентов C_n^r и C_m^r, где $r = 0, 1, \ldots, \max(n, m)$, и их производящие функции $F(x) = \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r x^r = (x+1)^n$ и $G(x) = \sum\limits_{r=0}^{m} C_m^r x^r = (x+1)^m$. Тогда $F(x) \cdot G(x) = (x+1)^n \cdot (x+1)^m = (x+1)^{n+m} = \sum\limits_{s=0}^{n+m} C_{n+m}^s x^s$. С другой стороны, перемножаем многочлены:

$$F(x) \cdot G(x) = \left(\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{m} C_m^r x^r\right) = \sum_{s=0}^{n+m} \left(\sum_{r=0}^{s} C_n^r C_m^{s-r}\right) x^s.$$

Приравнивая коэффициенты при x^k, получаем $\sum\limits_{r=0}^{k} C_n^r C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$.

Пример 2.5. Найти формулу для выражения $(x+y+z)^2$.

Решение. Найдем все возможные разбиения числа $n = 2$ на упорядоченные суммы трех ($m = 3$) неотрицательных чисел, их ровно $\hat{C}(3, 2) = C(3+2-1, 2) = 6$ (см. задачу 1.6) $2 = 0+0+2 = 0+1+1 = 0+2+0 = 1+0+1 = 1+1+0 = 2+0+0$ и соответствующие полиномиальные коэффициенты:

$$C(0,0,2) = C(0,2,0) = C(2,0,0) = \tfrac{2!}{0!0!2!} = 1;$$
$$C(0,1,1) = C(1,0,1) = C(1,1,0) = \tfrac{2!}{0!1!1!} = 2.$$

Следовательно, получаем формулу

$$(x+y+z)^2 = z^2 + 2yz + y^2 + 2xz + 2xy + x^2.$$

2.1. Найти значение суммы

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)C_n^k$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1}C_n^k$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k$; 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2C_n^k$;

7) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k$; 8) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \cdot C_n^k$.

2.2. Найти значение суммы

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k kC_n^k$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}(k-1)C_n^k$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(k+2)}{k+1}C_n^k$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}k(k-1)C_n^k$; 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k(k+1)^2C_n^k$;

7) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}C_n^k$; 8) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}C_n^k$.

2.3. При помощи производящих функций доказать тождество

1) $\sum\limits_{r=0}^{k} C_m^r C_n^{k-r} = C_{m+n}^k$;

2) $\sum\limits_{r=0}^{n-k} C_m^r C_n^{k+r} = C_{m+n}^{n-k}$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$;

4) $\sum\limits_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} C_m^r C_{n+k-r-1}^{k-r} = C_{m-n}^k$.

2.4. Доказать тождество

1) $\sum\limits_{r=0}^{s} C_{n-r}^k = C_{n+1}^{k+1} - C_{n-s}^{k+1}$;

2) $\sum\limits_{r=0}^{s} C_{n-r}^{k-r} = C_{n+1}^k - C_{n-s}^{k-s-1}$.

2.5. Доказать тождество

1) $\sum\limits_{r=0}^{n-m} C_{m+r}^{m} C_{n}^{m+r} = 2^{n-m} C_{n}^{m}$;

2) $\sum\limits_{r=0}^{n-m} (-1)^r C_{m+r}^{m} C_{n}^{m+r} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \geq m. \end{cases}$

2.6. Доказать тождество

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{r=0}^{n-k} C_{n}^{k} C_{n-k}^{r} = 3^n$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{r=0}^{n-k} \sum\limits_{s=0}^{n-k-r} C_{n}^{k} C_{n-k}^{r} C_{n-k-r}^{s} = 4^n$.