Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 18

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Перед обсуждением «основного» алгоритма вычисления таблиц маршрутизации (*алгоритма Туэга*), предложим решение смежной задачи — задачи вычисления весов оптимальных путей для всех пар вершин: для каждой пары вершин заданного графа (s, d) вычислить вес оптимального пути из s в d в этом графе

Обсуждающийся здесь алгоритм Флойда-Уоршелла — это **не**распределённый алгоритм вычисления весов оптимальных путей для всех пар вершин, который позже будет «усовершенствован» до алгоритма маршрутизации (т.е. распределённого вычисления таких путей, а не только их весов)

Дано:

- граф $G = (V, E)$
- набор весов $\omega_e \in \mathbb{Z}$ всех рёбер $e \in E$, такой что в графе G с этими весами нет циклов отрицательного веса
    - под весом $C(P)$ пути P будем понимать сумму весов рёбер этого пути

Требуется: для каждой пары вершин s, d вычислить вес $\rho[s, d]$ оптимального пути из s в d

- (если d недостижимо из s, то будем считать, что $\rho[s, d] = \infty$)

Все вершины пути, кроме первой и последней, назовём промежуточными

Для множества вершин W:

- W-путём назовём путь, все промежуточные вершины которого принадлежат множеству W
- W-расстоянием $\rho^W[s, d]$ между вершинами s и d назовём наименьший вес W-пути из s в d

Алгоритм Флойда-Уоршелла сперва вычисляет все $\emptyset$-расстояния и затем расширяет множество промежуточных вершин, пока не будут построены все V-расстояния

Теорема (о W-путях). Для любых вершины s и множества W, $W \subseteq V$, верно следующее:

1. $\rho^W[s,s] = 0$
2. **Для любой вершины d, отличной от s, верно следующее:**
   - 2.1 **Существует $\emptyset$-путь из s в d** $\Leftrightarrow (s,d) \in E$
   - 2.2 **Если $e = (s,d) \in E$, то $\rho^\emptyset[s,d] = \omega_e$, а иначе $\rho^\emptyset[s,d] = \infty$**
   - 2.3 **Если $W' = W \cup \{v\}$, то верно следующее:**
     - 2.3.1 **Простой W'-путь из s в d является либо W-путём из s в d, либо последовательным сцеплением W-пути из s в v и W-пути из v в d**
     - 2.3.2 $\rho^{W'}[s,d] = \min(\rho^W[s,d], \rho^W[s,v] + \rho^W[v,d])$
   - 2.4 **Любой путь из s в d является V-путём из s в d**
   - 2.5 $\rho[s,d] = \rho^V[s,d]$

Д.з. 1. Доказать эту теорему
(и для этого рекомендуется использовать лемму о простых путях)

На теореме о W-путях основан алгоритм Флойда-Уоршелла:

1. $W := \emptyset$;

2. Для каждой пары $(s, d) \in V^2$:
   - 2.1 Если $s = d$:
     - 2.1.1 $r[s, d] := 0$;
   - 2.2 Если $(s, d) \in E$:
     - 2.2.1 $r[s, d] := \omega_{(s,d)}$;
   - 2.3 Иначе:
     - 2.3.1 $r[s, d] := \infty$;

3. Пока $W \neq V$:
   - 3.1 Произвольно выбрать $v \in V \setminus W$ (опорную вершину)
   - 3.2 Для каждой пары $(s, d) \in V^2$:
     - 3.2.1 $r[s, d] := \min(r[s, d], r[s, v] + r[v, d])$;
   - 3.3 $W := W \cup \{v\}$;

4. Выдать ответ: $\rho = r$

Теорема (корректность). **Для ответа ρ, выдаваемого алгоритмом Флойда-Уоршелла, и любых вершин s, d значение $\rho[s, d]$ — это вес оптимального пути из s в d**

Доказательство. По теореме о W-путях:

- в (2) устанавливаются значения $r = \rho^{\emptyset}$ согласно пунктам 2.1 и 2.2 теоремы
- в (3) происходит пересчёт значений $r = \rho^{W} \to r = \rho^{W \cup \{v\}}$ согласно пункту 2.3.2 теоремы
- в (4) выдаётся ответ согласно пункту 2.5 теоремы ▼

Теорема (сложность). **Алгоритмом Флойда-Уоршелла выполняется $\Theta(n^3)$ действий (присваиваний и проверок условий), где $n = |V|$**

Доказательство.

В цикле (3) выполняется n итераций, и в каждой итерации — $\Theta(n^2)$ действий, а значит, суммарно по всем итерациям — $\Theta(n^3)$ операций

В остальной части алгоритма выполняется по порядку меньше операций (в (1) — одна, в (2) — $\Theta(n^2)$) ▼