Упражнения по выразимости в теориях

Обозначения

$\mathbb{N}_0$ — множество всех целых неотрицательных чисел: $\{0, 1, 2, \dots\}$.
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел: $\{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$.
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел.
$Ar[X; Const; Func; Pred]$ — арифметическая интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred\rangle$:

- X — предметная область: множество *чисел*;
- $Const \subseteq X$, и оценка каждого числа из $Const$ — само число;
- операции из $Func$ и предикаты из $Pred$ оцениваются естественным арифметическим образом:
  - $\overline{\mathbf{s}}$ — операция взятия следующего числа: $\overline{\mathbf{s}}(\alpha) = \alpha + 1$;
  - $\overline{+}, \overline{\times}, \cdot^n$ — операции сложения и умножения чисел и операция возведения числа в n-ю степень;
  - $\overline{=}, \overline{<}, \overline{\leq}, \overline{>}, \overline{\geq}, \overline{\equiv_\alpha}$ — отношения равенства, строгих и нестрогих неравенств чисел, равенства по модулю α;
  - $\dots$

Упражнение 1

Предложить аксиому, определяющую в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \{\mathbf{0}\}; \{\mathbf{s}, +, \times\}; \{=\}]$:

1. Число n, $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Отношение $\leq$ нестрогого неравенства чисел.
3. Операцию $\cdot^n$ возведения числа в n-ю степень, $n \in \mathbb{N}_0$.
4. Операцию $\lfloor \cdot / \cdot \rfloor$ деления чисел нацело ($x/0 = 0$).
5. Операцию rem вычисления остатка от деления ($rem(x, 0) = 0$).
6. Операцию max вычисления максимума двух чисел.
7. Операцию min вычисления минимума двух чисел.
8. Отношение $Factor = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_0; x \text{ является делителем } y\}$.
9. Свойство $Exp2 = \{x \mid x \text{ — степень двойки}\}$.
10. Свойство $Prime = \{x \mid x \text{ — простое число}\}$.
11. Свойство $PrimeFactor = \{(x, y) \mid x \text{ — простой делитель числа } y\}$.
12. Отношение $Coprime = \{(x, y) \mid x,\ y \text{ — взаимно простые числа из } \mathbb{N}_0\}$.
13. Свойство $ExpPrime = \{x \mid x \text{ является степенью простого числа}\}$.
14. Отношение $\cdot \equiv_{\cdot} \cdot$ равенства двух чисел по модулю третьего числа (всегда верно $x \equiv_0 y$).
15. Операцию **НОД** вычисления наибольшего общего делителя чисел (**НОД**$(x, 0) =$ **НОД**$(0, x) = 0$).
16. Операцию **НОК** вычисления наименьшего общего кратного чисел (**НОК**$(x, 0) =$ **НОК**$(0, x) = 0$).
17. Отношение
$$Root_n = \left\{(y, x_0, \dots, x_n) \mid y, x_0, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0; y \text{ — корень полинома } \sum_{i=0}^{k}(x_i \times z^i) \text{ относительно } z\right\},\ n \in \mathbb{N}_0.$$
18. Операцию $\lfloor\sqrt{\cdot}\rfloor$ вычисления целой части квадратного корня числа.
19. Операцию $f(x) = 2^x$.
20. Операцию $f(x) = x!$.

Упражнение 2

Доказать, что:

1. В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \{\mathbf{0}\}; \{\mathbf{s}, +\}; \{=\}]$ **не**выразима операция $\times$.
2. В интерпретациях $Ar[\mathbb{N}_0; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$, $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ и $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ выразимо отношение $=$.
3. В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ выразимы числа 0 и 1.
4. В интерпретациях $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ и $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ **не**выразимы числа 0 и 1.
5. В интерпретациях $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \{+\}; \{=\}]$ и $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \{+\}; \{=\}]$ выразимо число 0 и **не**выразимо число 1.
6. В интерпретации $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \{+\}; \{<\}]$ выразимы числа 0 и 1.
7. В интерпретации $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \{+\}; \{<\}]$ выразимо число 0 и **не**выразимо число 1.
8. В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \emptyset; \left\{+, \cdot^2\right\}; \{=\}]$ выразима операция $\times$
9. В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \emptyset; \left\{+, \cdot^3\right\}; \{=\}]$ **не**выразима операция $\times$

Упражнение 3

Пусть $\mathfrak{I}$ — множество всех интерпретаций $\mathcal{I}$ сигнатуры $\sigma = \left\langle \emptyset, \left\{*^{(2)}\right\}, \left\{=^{(2)}\right\}\right\rangle$, для которых верно следующее: предметная область вместе с оценкой функционального символа $*$ образует полугруппу ($S_{\mathcal{I}}$); предикатный символ $=$ оценивается как отношение равенства элементов полугруппы $S_{\mathcal{I}}$.

Предложить множество аксиом сигнатуры σ, моделями которого являются:

1. Все интерпретации множества $\mathfrak{I}$ и только они.
2. Все интерпретации $\mathcal{I}$ множества $\mathfrak{I}$, такие что полугруппа $S_{\mathcal{I}}$ содержит нейтральный элемент, и только они.
3. Все интерпретации $\mathcal{I}$ множества $\mathfrak{I}$, такие что полугруппа $S_{\mathcal{I}}$ является группой, и только они.
4. Все интерпретации $\mathcal{I}$ множества $\mathfrak{I}$, такие что полугруппа $S_{\mathcal{I}}$ является абелевой группой, и только они.