Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 25

Рекурсия в системах процессов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

$$p \ ::= \ a \ | \ \boldsymbol{\delta} \ | \ (p+p) \ | \ (p.p) \ | \ (p \| p) \ | \ (p \lfloor\!\lfloor p) \ | \ (p|p) \ | \ \partial_X(p)$$

Правила вывода ACP устроены так, что все вычисления процессов оказываются конечными

Иными словами, процессный граф оказывается конечным и ациклическим

Значит, и проверка семантических свойств процессов оказывается настолько же простой, насколько и соответствующие этим свойствам задачи на графах

В частности, проверка одинаковости поведения процессов во многих смыслах (включая изоморфизм и бисимуляционную эквивалентность процессных графов) в ACP разрешима

Но всё же хотелось бы иметь средства описания процессов с бесконечными вычислениями

Два наиболее популярных средства, позволяющих это сделать, — это оператор репликации и рекурсивные спецификации

Оператор репликации

Это одноместная операция !, семантика которой задаётся правилами

$$\frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{!p \xrightarrow{a} \widetilde{p} \| !p} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{!p \xrightarrow{a} !p}$$

для незавершившихся процессов p и $\widetilde{p}$ и действия a

Приоритет оператора репликации выше приоритета остальных рассматривавшихся операций

Пример: процессом

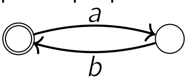
$$p = \partial_X(!(send.\overline{ack}) \| !(\overline{send}.ack)),$$

где $X = \{send, \overline{send}, ack, \overline{ack}\}$, описывается бесконечная (зацикленная) синхронная передача сообщений ($\boxed{\text{send}}$) с подтверждением их получения ($\boxed{\text{ack}}$):

$$p \xrightarrow{\boxed{\text{send}}} \partial_X(\overline{ack} \| !(send.\overline{ack}) \| ack \| !(\overline{send}.ack)) \xrightarrow{\boxed{\text{ack}}} p \xrightarrow{\boxed{\text{send}}} \ldots$$

Рекурсивные спецификации

Начнём с примера: рассмотрим граф



Этот граф можно понимать как граф процесса (*в широком неформальном смысле*), в котором бесконечно повторяется последовательное выполнение действий a и b

Если обозначить процесс, отвечающий левой вершине графа, переменной X, а правой — переменной Y, то эти процессы можно выразить друг через друга так:

$$X = a.Y \qquad\qquad Y = b.X$$

Термом процесса назовём запись, синтаксис которой отличается от синтаксиса процесса тем, что в тех местах, где разрешено записывать действие, также может быть записана переменная процесса из заранее заданного множества Var

Рекурсивная спецификация — это конечная система уравнений вида $X = t$, где X — переменная процесса и t — терм процесса над множеством всех переменных в левых частях уравнений системы

Рекурсивные спецификации

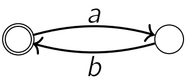
Содержательно,

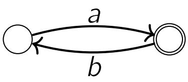
- операции процессов можно понимать как способы построения процессных графов согласно устройству отношения переходов, и
- решение рекурсивной спецификации — это оценка переменных спецификации, сопоставляющая каждой переменной процес (в широком понимании, или чуть более строго — процессный граф) так, что при подстановке этих процессов на места переменных левая и правая части каждого уравнения оказываются одинаковыми (более строго — бисимуляционно эквивалентными)

Например, решением системы

$$\begin{cases} X & = & a.Y \\ Y & = & b.X \end{cases}$$

является оценка переменных X, Y соответственно графами





Рекурсивные спецификации

Ещё один пример: бесконечная синхронная передача сообщений с подтверждением их получения, может быть представлена как оценка переменной S в решении спецификации

$$\left\{\begin{array}{lcl} S & = & \partial_{\{send,\overline{send},ack,\overline{ack}\}}(X\|Y) \\ X & = & send.\overline{ack}\|X \\ Y & = & \overline{send}.ack\|Y \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Для размышлений и тренировки}}$ можете попробовать найти решение следующей рекурсивной спецификации:

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & \partial_{\{a,\overline{a}\}}(Y\|Z) \\ Y & = & a+Z \\ Z & = & \overline{a}.Z+b \end{array}\right.$$

Предохранённые рекурсивные спецификации

Хотелось бы понимать рекурсивную спецификацию с выделенной переменной как способ однозначного (с точностью до эквивалентности) задания процессного графа

Но оказывается, что для этих целей подходит не любая рекурсивная спецификация (*как и не любая совместная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение*)

Например, спецификация, состоящая из одного уравнения $X = a \| X$, имеет неэквивалентные решения ($\boxed{\text{а какие?}}$)

Рекурсивная спецификация называется предохранённой (guarded), если в ней содержатся только уравнения вида

$$X = a_1.t_1 + \cdots + a_n.t_n + b_1 + \cdots + b_k \text{ и}$$
$$X = \boldsymbol{\delta},$$

где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k$ — действия и $t_1, \ldots, t_n$ — термы процесса

Известно, что у предохранённой рекурсивной спецификации (п.р.с.) существует единственное решение

Предохранённые рекурсивные спецификации

Процессы, задающиеся п.р.с., естественно встраиваются в систему процессов

Пусть E — п.р.с. вида

$$\begin{cases} X_1 & = & t_1 \\ & \dots & \\ X_n & = & t_n \end{cases}$$

Объявим процессом запись вида $\langle X_i | E \rangle$, где $1 \leq i \leq n$

Содержательно, это процесс отвечает значению переменной X_i в решении спецификации E

Предохранённые рекурсивные спецификации

$$E = \begin{cases} X_1 & = & t_1 \\ & \dots & \\ X_n & = & t_n \end{cases}$$

Пусть $t_i(p_1, \dots, p_n)$ — процесс, получающийся из t_i заменой каждого вхождения каждой переменной X_i, $1 \leq i \leq n$, на процесс p_i

Для задания семантики п.р.с. E в систему процессов для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ добавляется правило

$$\frac{t_i(\langle X_1 | E \rangle, \dots, \langle X_n | E \rangle) \xrightarrow{a} p}{\langle X_n | E \rangle \xrightarrow{a} p},$$

где $a \in \mathcal{A}$ и p обозначает процесс (возможно, завершённый)

Согласно теореме из блока 24, так как истоки всех этих правил свежи относительно ACP, то при их добавлении в ACP получается консервативное расширение

Кроме того, все эти правила, *очевидно*, зависимы

Предохранённые рекурсивные спецификации

Например, для п.р.с.

$$E = \left\{ \begin{array}{lcl} X & = & a.Y \\ Y & = & b.X \end{array} \right.$$

существует такой вывод шагов вычисления:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{a \xrightarrow{a} \checkmark}}{a\langle Y|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle}}{\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle}$$

Аналогично можно вывести шаг $\langle Y|E\rangle \xrightarrow{b} \langle X|E\rangle$

Следовательно, существует такое вычисление процесса $\langle X|E\rangle$:

$$\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \xrightarrow{b} \langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \xrightarrow{b} \ldots$$

Предохранённые рекурсивные спецификации

Другой пример: для $A = \{send, \overline{send}, ack, \overline{ack}\}$ и п.р.с.

$$E = \left\{ \begin{array}{lcl} X & = & send.\overline{ack}\|X \\ Y & = & \overline{send}.ack\|Y \end{array} \right.$$

верно следующее:

$$\begin{array}{c}
\partial_A(\langle X|E\rangle\|\langle Y|E\rangle) \xrightarrow{\boxed{\text{send}}} \\
\partial_A(\overline{ack}\|\langle X|E\rangle\|ack\|\langle Y|E\rangle) \xrightarrow{\boxed{\text{send}}} \\
\partial_A(\overline{ack}\|\overline{ack}\|\langle X|E\rangle\|ack\|ack\|\langle Y|E\rangle) \xrightarrow{\boxed{\text{ack}}} \\
\partial_A(\overline{ack}\|\langle X|E\rangle\|ack\|\langle Y|E\rangle) \xrightarrow{\boxed{\text{ack}}} \\
\partial_A(\langle X|E\rangle\|\langle Y|E\rangle) \xrightarrow{\boxed{\text{send}}} \ldots
\end{array}$$