

Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 5

Задачи и проблемы
Алгоритмы
Разрешимость
M-сводимость

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Задачи и проблемы

У Васи есть 5 яблок. 2 яблока он отдал Коле.
Сколько яблок осталось у Васи?

Это пример того, что принято называть **задачей**

Более точно, это **индивидуальная задача**:

задача с конкретными входными данными и конкретным ответом (3)

У Васи есть N яблок. K яблок ($K \leq N$) он отдал Коле.
Сколько яблок осталось у Васи?

Это также пример того, что принято называть **задачей**

Ответ к этой задаче определяется

значениями **параметров** (входными данными) N и K

Такие (*параметризованные*) задачи принято называть **массовыми задачами**, или, по-другому, **проблемами**

Задачи и проблемы

Массовую задачу \mathfrak{I} можно понимать как отображение $\mathfrak{I} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$, где

- ▶ \mathcal{I} — множество всевозможных **входных данных** (**входов**)
- ▶ \mathcal{O} — множество всевозможных **выходных данных** (**выходов**; **ответов**)
- ▶ значение $\mathfrak{I}(i)$ — **правильный ответ** для входа i

Например, последняя задача о яблоках — это отображение

$\mathfrak{I} : \{(n, k) \mid n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n\} \rightarrow \mathbb{N}_0$, где

- ▶ \mathbb{N}_0 — множество всех неотрицательных целых чисел
- ▶ $\mathfrak{I}(n, k) = n - k$

Алгоритмы и разрешимость

Алгоритм — это особая совокупность действий,¹ согласно которой **входы** заданного множества \mathcal{I} преобразуются в **ответы** заданного множества \mathcal{D} (или не преобразуются, если применяется бесконечно много действий)²

Алгоритмом \mathcal{A} **реализуется** *частично определённое* отображение $\bar{\mathcal{A}}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ следующего вида:

- ▶ если к входу i применяется конечное число действий, то $\bar{\mathcal{A}}(i)$ — ответ, вычисляемый алгоритмом
 - ▶ и алгоритм **останавливается** (**завершается**) на входе i
- ▶ иначе значение $\bar{\mathcal{A}}(i)$ не определено
 - ▶ и алгоритм **не останавливается** (**не завершается**) на входе i

1 Вспоминайте из других курсов, какая именно совокупность каких действий

2 На самом деле бывают и другие алгоритмы, согласно которым выходные данные получаются многократно, или постоянно, или понятие выходных данных отсутствует — но не будем всё переусложнять

Алгоритмы и разрешимость

Алгоритмы¹ придумываются для того, чтобы **решать** **массовые задачи**

Алгоритм \mathcal{A} **решает** задачу $\mathcal{T} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$, если $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{T}$, то есть

- ▶ \mathcal{A} и \mathcal{T} определены для одинаковых множеств входных и выходных данных, и
- ▶ \mathcal{A} завершается на любом входе и всегда вычисляет правильный ответ к задаче \mathcal{T}

Массовая задача (**алгоритмически**) **разрешима**, если существует алгоритм, решающий эту задачу, и **неразрешима**, если такого алгоритма не существует

¹ Как минимум такие алгоритмы, как на предыдущем слайде

M-сводимость

Задача распознавания — это массовая задача

с множеством ответов **{да, нет}** (оно же $\{1, 0\}$, оно же $\{t, f\}$)

Задача $\mathfrak{T}_1 : \mathfrak{I}_1 \rightarrow \{1, 0\}$ **m-сводится** (или **m-сводима**)¹

к задаче $\mathfrak{T}_2 : \mathfrak{I}_2 \rightarrow \{1, 0\}$, если существует алгоритм \mathcal{A} , такой что

- ▶ $\bar{\mathcal{A}} : \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}_2$ — всюду определённое отображение и
- ▶ для любого входа i задачи \mathfrak{T}_1 верно $\mathfrak{T}_1(i) = \mathfrak{T}_2(\mathcal{A}(i))$

Обозначенный алгоритм \mathcal{A} **сводит** задачу \mathfrak{T}_1 к задаче \mathfrak{T}_2

Например, если

\mathfrak{T}_1 — задача проверки чётности целого числа

$$(\mathfrak{T}_1(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k : x = 2k) \text{ и}$$

\mathfrak{T}_2 — задача проверки делимости целого числа на 8

$$(\mathfrak{T}_2(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k : x = 8k), \text{ то}$$

алгоритм \mathcal{A} умножения целого числа на 4 ($\bar{\mathcal{A}}(x) = 4x$) m-сводит \mathfrak{T}_1 к \mathfrak{T}_2 :

$$\mathfrak{T}_1(x) = \mathfrak{T}_2(4x) = \mathfrak{T}_2(\bar{\mathcal{A}}(x))$$

¹ Есть много разных видов сводимости, и этот вид (*должен быть*) вам известен из рассказа про останов и самоприменимость в курсе, посвящённом алгоритмам. Других видов в курсе не будет, так что можете не думать над тем, что означает «m»

M-сводимость

Теорема (об m-сводимости). Если задача \mathfrak{T}_1 m-сводится к разрешимой задаче \mathfrak{T}_2 , то задача \mathfrak{T}_1 также разрешима

Доказательство.¹

Положим, что задача \mathfrak{T}_2 разрешима и что задача \mathfrak{T}_1 m-сводится к \mathfrak{T}_2

По определению разрешимости, существует алгоритм \mathcal{A} , решающий \mathfrak{T}_2

По определению m-сводимости,

существует алгоритм \mathcal{B} , сводящий \mathfrak{T}_1 к \mathfrak{T}_2

Тогда существует и алгоритм решения задачи \mathfrak{T}_1 :

последовательно применим \mathcal{B} и \mathcal{A} к входу i задачи \mathfrak{T}_1 $(i \xrightarrow{\mathcal{B}} j \xrightarrow{\mathcal{A}} o)$

По выбору алгоритма \mathcal{A} , $\overline{\mathcal{A}}(\overline{\mathcal{B}}(i)) = \mathfrak{T}_2(\overline{\mathcal{B}}(i))$

По выбору алгоритма \mathcal{B} , $\mathfrak{T}_2(\overline{\mathcal{B}}(i)) = \mathfrak{T}_1(i)$ ▼

Следствие. Если неразрешимая задача \mathfrak{T}_1 m-сводится к задаче \mathfrak{T}_2 , то задача \mathfrak{T}_2 также неразрешима

¹ Это доказательство (должно быть) вам известно из какого-нибудь курса, посвящённого алгоритмам. Повторим его «для профилактики».

M-сводимость

Иллюстрация теоремы

Мой сосед умеет проверять (алгоритмом \mathcal{A}), делится ли целое число нацело на 8:

$$\mathfrak{T}_2(x) = 1 \Leftrightarrow x = 8k$$

Я хочу научиться решать задачу проверки чётности целого числа:

$$\mathfrak{T}_1(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2m$$

Тогда я могу организовать алгоритм решения своей задачи \mathfrak{T}_1 так:

1. Умножить входное число на 4 подходящим алгоритмом \mathcal{B} :

$$\overline{\mathcal{B}}(x) = 4x$$

2. Спросить у соседа, делится ли полученное число на 8:

$$\mathfrak{T}_2(\overline{\mathcal{B}}(x)) = \overline{\mathcal{A}}(\overline{\mathcal{B}}(x)) = ?$$

3. Получив ответ от соседа, выдать его за свой:

$$\overline{\mathcal{A}}(\overline{\mathcal{B}}(x)) = \mathfrak{T}_1(x)$$

M-сводимость

Иллюстрация следствия

Мой сосед знает, что проблема самоприменимости машин Тьюринга (\mathfrak{T}_1) неразрешима

Я хочу научиться решать проблему останова машин Тьюринга (\mathfrak{T}_2)

Сосед

- ▶ убеждает меня в неразрешимости \mathfrak{T}_1 и
- ▶ объясняет, как по произвольному входу i к своей задаче построить вход $\bar{B}(i)$ к моей задаче, такой что

$$\mathfrak{T}_1(i) = \mathfrak{T}_2(\bar{B}(i))$$

Если бы вдруг я научился решать \mathfrak{T}_2 , то мой сосед научился бы решать \mathfrak{T}_1 с моей помощью так, как это обозначено в иллюстрации теоремы

Значит, моя задача \mathfrak{T}_2 неразрешима