

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Вариант 2015 г. (гр. 318), глава 3

Москва 2015

Оглавление

Введение	4
3 Синтез и сложность управляющих систем	7
§1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций.	7
§2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.	13
§3 Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона.	21
§4 Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения. Метод Шеннона	30
§5 Нижние мощностные оценки функции Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для функций из специальных классов	41
§6 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$	47

§7	Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$	52
§8	Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых классов	56

Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкрет-

ное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюн-

ктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

Глава 3

Синтез и сложность управляющих систем

§1 Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть \mathcal{U} — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ , а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса \mathcal{U} , то есть отображение \mathcal{U} во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер (ср. с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно

функционала Ψ в классе \mathcal{U} как минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из \mathcal{U} , которые реализуют F . При этом схема Σ , принадлежащая классу \mathcal{U} , которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе \mathcal{U} относительно функционала Ψ . В силу монотонности функционала Ψ , минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом $L(D, R, \text{ и т. д.})$, будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной, рангом, и т. д.*) *системы ФАЛ F* . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида \mathcal{U}_B^A (вида \mathcal{U}^A) будем обозначать через $\Psi_B^A(F)$ (соответственно $\Psi^A(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi_B^A(n)$ (соответственно $\Psi^A(n)$). В обозначениях классов \mathcal{U}_B^C , \mathcal{U}_B^Φ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс B вида B_0 будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем \mathcal{U}' и \mathcal{U}'' соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют π -схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π -схема Σ_f , которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

Следствие 1. *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π -схемой сложности 2, а также формулой из \mathcal{U}^Φ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Следствие 2. В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

Лемма 1.2. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π -схема Σ_f и формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Доказательство. В качестве Σ_f можно взять π -схему, которая получается из $(1, 2^n)$ -КД порядка n от БП x_1, \dots, x_n (рис. 1.1) в результате снятия тех его выходов, где реализу-

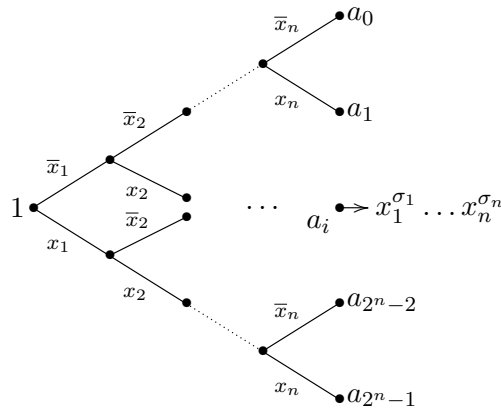


Рис. 1.1: $(1, 2^n)$ -контактное дерево порядка n

ются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ f , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула \mathcal{F}_f получается в результате моделирования построенной π -схемы Σ_f в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где $L^-(\Sigma_f)$ — число размыкающих контактов в схеме Σ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.2)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.3)$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v , а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v , объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v . Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ операции присоединения

вершины v к вершине w . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ Σ' , которая, очевидно, эквивалентна Σ .

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ G , $G \subseteq P_2(n)$, через \vec{G} будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества G , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ будем называть *универсальной системой* порядка n .

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка n , то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$;
2. мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n ;
3. дешифратора \vec{Q}_n (дизъюнктивного дешифратора \vec{J}_n) порядка n ;
4. универсальной системы $\vec{P}_2(n)$ порядка n .

Лемма 1.3. *Для каждого натурального n в \mathcal{U}_B^C существует СФЭ U_n , которая реализует систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^{2^n} - n$.*

Доказательство. В силу полноты базиса, в \mathcal{U}_B^C существует система формул Σ от БП x_1, \dots, x_n , которая реализует систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n , включая n ее входов, равно 2^{2^n} и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

§2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

Лемма 2.1. *Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (2.1)$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k). \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть Σ_f — минимальная по сложности СФЭ из \mathcal{U}^C , реализующая ФАЛ f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_1, \dots, x_n следует, что $R(\Sigma_f) \geq n$, и поэтому, в силу соотношений (2.6) главы 2,

$$L^C(f) \geq L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ f не является монотонной ФАЛ, то схема Σ_f должна содержать хотя бы один ФЭ \neg и, следовательно, в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Пусть теперь Σ_f — минимальная по сложности $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_i , $i \in [1, n]$, следует, что либо контакт вида x_i , либо контакт вида \bar{x}_i встречается в КС Σ_f , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f , то как контакт вида x_i , так и контакт вида \bar{x}_i входят в Σ_f , и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

Замечание. Нижние оценки сложности ФАЛ $f = s_n^{[0, n-1]}$, вытекающие из леммы 2.1, доказывают минимальность π -схемы, моделирующей $\exists \overline{x_1 \vee \dots \vee x_n} = f$, в классе КС и минимальность формулы $(\overline{x_1 \dots x_n}) = f$ в классе СФЭ, что устанавливает равенства $L^K(f) = n$ и $L^C(f) = n$.

Лемма 2.2. *Для системы $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (2.3)$$

Доказательство. Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ f_i , $i = 1, \dots, m$, реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь Σ_F — приведенная $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ F . Из приведенности Σ_F и условий леммы вытекает, что Σ_F — связный граф с не менее чем $(m+1)$ вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\vec{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

Замечание. В силу следствия универсальная СФЭ U_n , построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе \mathcal{U}_B^C .

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для некоторых ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

Лемма 2.3. *Для любого натурального n выполняются неравенства:*

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}); \quad (2.4)$$

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2; \quad (2.5)$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (2.6)$$

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (2.7)$$

Доказательство. В классе \mathcal{U}^C построим схемный дешифратор порядка n , удовлетворяющий первому неравенству (2.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП $X(n)$ на группы $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, где $q = \lceil n/2 \rceil$;
2. возьмем дешифраторы Σ' и Σ'' от БП x' и x'' порядка q и $(n - q)$ соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ Σ' и Σ'' , после чего конъюнктируем каждый выход Σ' с каждым выходом Σ'' , а выходы всех использованных для этого 2^n ФЭ $\&$ (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Аналогичным образом строится дизъюнктивный схемный дешифратор порядка n , удовлетворяющий второму неравенству (2.4).

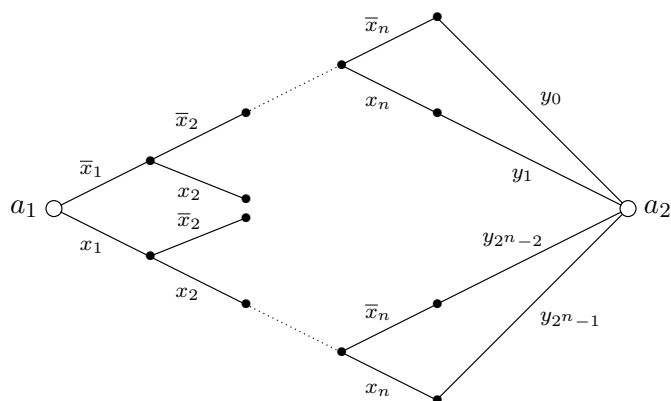


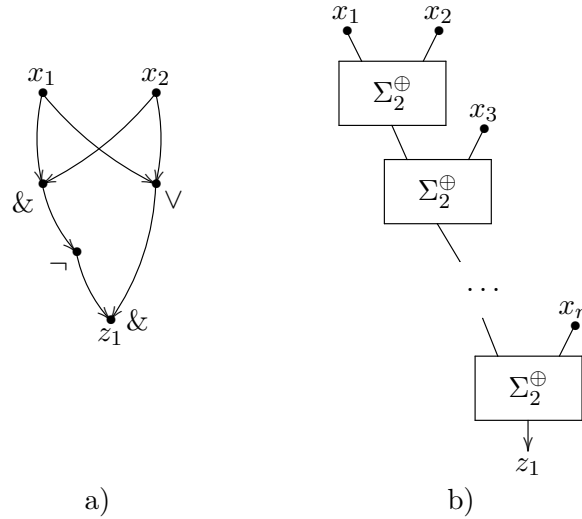
Рис. 2.1: π -схема для ФАЛ μ_n

Искомым контактным дешифратором порядка n является $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рис. 1.1, а искомым контактным мультиплексором порядка n является π -схема, приведенная на рис. 2.1. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 1.1 и 2.1, равна $2^{n+1} - 2$ и $3 \cdot 2^n - 2$ соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.5) и (2.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно $2^n - 1$.

В результате моделирования указанной π -схемы можно построить неповторную по информационным БП формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\dots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.6), так как

Рис. 2.2: СФЭ для ФАЛ ℓ_2 и ℓ_n

реализует ФАЛ μ_n и имеет сложность $4 \cdot 2^n - 3$.

Неравенства (2.7) при $n = 1$, очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ ℓ_n , $n \geq 2$, со сложностью (2.7), является СФЭ Σ_n^{\oplus} , показанная на рис. 2.2а,б. Аналогичная СФЭ для ФАЛ $\bar{\ell}_n$ получается в результате замены ФЭ $\&$ на ФЭ \vee и ФЭ \vee на ФЭ $\&$ в первой подсхеме вида Σ_2^{\oplus} схемы Σ_n^{\oplus} (см. рис. 2.2а).

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

Лемма 2.4. Если система ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных

от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

Доказательство. Возьмем приведенную $(1, m)$ -КС Σ , реализующую систему ФАЛ F , и заметим, что при любом α , $\alpha \in B^n$, в сети $\Sigma|_\alpha$ имеется связная компонента, которая содержит вход Σ и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе α . Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам α , $\alpha \in B^n$, придем к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2.$$

Замечание. В силу следствия $(1, 4)$ -КС с входом a , которая состоит из двух непересекающихся по внутренним вершинам $(a - a)$ -цепей (циклов) длины 3 с ЭК проводимости $\bar{x}_1 x_2 x_1$ и $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1$, является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.

Лемма 2.5. Если для ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, и для любого σ , $\sigma \in B$, ФАЛ $f_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$, то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f_0), L_{\&, \vee}^C(f_1)\} + 2. \quad (2.8)$$

Доказательство. Пусть Σ — минимальная по числу ФЭ $\&$ и \vee СФЭ из класса \mathcal{U}^C , которая реализует ФАЛ f и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ \neg . Из условия леммы следует, что выход ФЭ \neg , присоединённого к входу x_n СФЭ Σ не может быть её выходом.

Пусть цепь C соединяет вход x_n СФЭ Σ с её выходом z_1 и пусть константа σ , $\sigma \in B$, равна 0 тогда и только тогда, когда БП x_n подается в C либо на вход ФЭ $\&$, либо на вход ФЭ \neg , к выходу которого в C присоединён ФЭ \vee .

Рассмотрим СФЭ $\widehat{\Sigma}$, которая реализует ФАЛ f_σ , $f_\sigma \neq 0, 1$, и получена из СФЭ Σ в результате подстановки $x_n = \sigma$, а также последующего ЭП на основе тождеств $\tau^{\text{ПК}}$ (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедемся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа $\&$ или \vee .

Действительно, в случае $\sigma = 0$ из СФЭ Σ будет удален ФЭ \mathcal{E}' , являющийся первым ФЭ типа $\&$ или \vee цепи C . Заметим, что выход ФЭ \mathcal{E}' не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ \neg , выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ f_σ была бы равна константе. Следовательно, на цепи C СФЭ Σ имеется ФЭ \mathcal{E}'' типа $\&$ или \vee , на вход которого поступает либо выход \mathcal{E}' , либо выход ФЭ \neg , присоединённого к выходу \mathcal{E}' . Легко видеть, что ФЭ \mathcal{E}'' тоже будет удален при переходе от Σ к $\widehat{\Sigma}$ и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&,\vee}(f) = L_{\&,\vee}(\Sigma) \geq L_{\&,\vee}(\widehat{\Sigma}) + 2 \geq L_{\&,\vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (2.8).

Случай $\sigma = 1$, когда БП x_n подаётся в C либо на вход ФЭ \vee , либо на вход ФЭ \neg , к выходу которого присоединён ФЭ типа $\&$, рассматривается аналогично.

Лемма доказана. \square

Следствие 1.

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1. \quad (2.9)$$

Действительно, (2.9) получается в результате применения леммы 2.5 последовательно ко всем информационным БП y_{2^n-1}, \dots, y_1 и учитывая, что получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП x_1, \dots, x_n, y_0 .

Следствие 2. Из (2.9) в силу леммы 4.1 главы 2 вытекает неравенство

$$D(\mu_n) \geq n + 1.$$

Замечание. В силу следствия 1 формула $\bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$ является минимальной СФЭ, реализующей ФАЛ μ_1 и $L^C(\mu_1) = 4$.

§3 Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона.

Рассмотрим структурные преобразования схем, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется *тождественной вершиной кратности k* , $k \geq 0$, если она одновременно является k -кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается *фиктивной*.

Простейшими видами суперпозиции схем являются: 1) операция *переименования входов схемы* с возможным их отождествлением; 2) операция *переименования выходов схемы*

с возможным их дублированием или снятием; 3) операция *объединения схем*, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая, как обычное объединение соответствующих графов.

Будем говорить, что схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является *суперпозицией схем* Σ'' и Σ' без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ' . Указанная суперпозиция считается *бесповторной*, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ' . Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется *стыковкой*, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Заметим, что операции объединения схем и переименования их входов (выходов) являются частными случаями введенной операции суперпозиции. Действительно, для объединения схем это очевидно, а любое переименование выходов (входов) схемы Σ можно задать суперпозицией вида $\Sigma_2''(\Sigma_1''(\Sigma))$ (соответственно $\Sigma(\Sigma_1'(\Sigma_2'))$), где схемы Σ_i' и Σ_i'' , $i = 1, 2$, состоят из тождественных вершин различной кратности.

Заметим также, что суперпозиция общего вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ всегда может быть сведена к стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' соответственно добавлением тождественных вершин и переименованием выходов. Стыковка вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, в свою очередь, может быть сведена к бесповторной стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' снятием выходов и отождествлением входов соответственно.

Для суперпозиции схем вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ характерно, как правило, то, что схема Σ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или ча-

сти) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ'' . В случае стыковки, например, это означает, что схема Σ реализует набор функций вида $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$, где \mathcal{F}'' и \mathcal{F}' — наборы функций, реализованные схемами Σ'' и Σ' соответственно. Суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается *правильной*, если схема Σ обладает указанным свойством, и *корректной*, если, кроме того, в любой вершине Σ , которая соответствует выходной вершине Σ' , реализуется та же самая функция, что и в Σ' . Заметим, что правильная суперпозиция вида $\Sigma''(\Sigma')$ автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины Σ' больше числа присоединяемых к ней входов Σ'' . Заметим также, что с содержательной точки зрения корректность суперпозиции вида $\Sigma''(\Sigma')$ позволяет одновременно использовать выходы Σ' в других суперпозициях.

Легко видеть, что любая СФЭ может быть получена в результате многократного применения операции суперпозиции, на каждом шаге которой происходит дублирование выхода или присоединение одного ФЭ к выходам СФЭ, первоначально состоящей из тождественных вершин.

Так, на рис. 2.2а показана СФЭ Σ_2^\oplus , имеющая сложность 4 и реализующая ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, а на рис. 2.2б — СФЭ Σ_n^\oplus , $n \geq 3$, которая является результатом «последовательной» суперпозиции $(n - 1)$ схем Σ_2^\oplus и реализует ФАЛ $\ell_n(x_1, \dots, x_n)$ со сложностью $4n - 4$.

Операция суперпозиции КС и все ее частные случаи определяются обычным образом. При этом пометками входов и выходов КС, в отличие от СФЭ, не обязательно являются переменные, а БП, управляющие проводимостью контактов КС, никак не связаны с ее входами.

Рассмотрим вопросы, связанные с нахождением функционирования для суперпозиций сетей или КС. Из соображений удобства будем допускать наличие в КС ориентированных (неориентированных) ребер без пометок, которые про-

водят при любых значениях управляющих входных БП в указанном (соответственно в любом) направлении и называются вентилями (соответственно *проводниками*). Это позволяет считать, что сети являются частным случаем КС и реализуют свои матрицы достижимости, состоящие из константных ФАЛ.

Легко видеть, что перестановка входов(выходов) КС порождает в реализуемой ею матрице такую же перестановку связанных с ними строк (соответственно столбцов), а снятие (дублирование) выходов этой КС — удаление (соответственно добавление) связанных с ними столбцов. Заметим также, что КС Σ , которая является объединением КС Σ' и Σ'' , реализующих матрицы F' и F'' соответственно, реализует матрицу F вида¹:

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline F' & 0 \\ \hline 0 & F'' \\ \hline \end{array}$$

Обратимся, далее, к особенностям функционирования КС, получающихся в результате применения операций суперпозиции общего вида. Напомним, что суперпозиция общего вида сводится к последовательному выполнению операций переименования выходов, добавления тождественных вершин и стыковки. При этом стыковка, в свою очередь, сводится к снятию выходов, отождествлению входов и неповторной стыковке.

Заметим, что результат отождествления первых p входов КС Σ эквивалентен результату стыковки вида $\Sigma(\Sigma')$, а результат p -кратного дублирования первого выхода КС Σ — результату стыковки $\Sigma''(\Sigma)$, где КС Σ' , Σ'' состоят из

¹Предполагается, что номер любого входа (выхода) КС Σ' меньше номера любого входа (соответственно выхода) КС Σ'' в КС Σ , а внутренняя упорядоченность полюсов КС Σ' и Σ'' в КС Σ сохраняется. В остальных случаях происходит необходимая перестановка входов и выходов КС Σ .

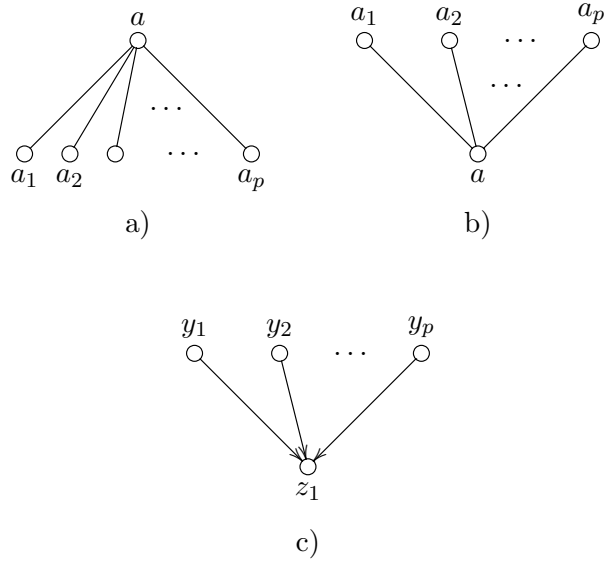


Рис. 3.1: проводящие и вентильная звезды порядка p

($1, p$)-проводящей звезды (см. рис. 3.1а, a — вход) и тождественных вершин. Заметим также, что стыковка вида $\Sigma(\widehat{\Sigma})$, где КС $\widehat{\Sigma}$ состоит из ($p, 1$)-проводящей звезды (см. рис. 3.1б, a — выход) и тождественных вершин, соответствует отождествлению первых p выходов КС Σ .

В соответствии с общими правилами стыковка (суперпозиция) КС вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется² *правильной*, если для матриц F , F' и F'' , реализуемых КС Σ , Σ' и Σ'' соответственно, выполняется равенство

$$F = F' \cdot F''. \tag{3.1}$$

²Это определение соответствует «обычному» определению корректной суперпозиции в рамках модели так называемых преобразующих КС.

Указанная суперпозиция считается *корректной*, если, кроме того, в выходных вершинах подсхемы Σ'' схемы Σ реализуются те же самые столбцы ФАЛ, что и в самой схеме Σ . Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП.

Заметим, что при правильной стыковке $(1, p)$ -КС и $(p, 1)$ -КС, реализующих строку и столбец из ФАЛ (f'_1, \dots, f'_p) и (f''_1, \dots, f''_p) соответственно, получается $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ $f'_1 f''_1 \vee \dots \vee f'_p f''_p$, при правильном отождествлении входов (выходов) КС в реализуемой ею матрице происходит поразрядная дизъюнкция тех строк (соответственно столбцов), которые соответствуют отождествленным входам (соответственно выходам) и т. п.

Легко видеть, что операция переименования входов (выходов) КС без отождествления, операция объединения КС, а также операция последовательного соединения $(1, 1)$ -КС корректны в любом случае. В то же время параллельное соединение $(1, 1)$ -КС, при котором сначала отождествляются входы, а затем выходы соединяемых КС, не является, в общем случае, корректной операцией суперпозиции, хотя является при этом правильной суперпозицией, так как полученная КС реализует дизъюнкцию ФАЛ, реализуемых исходными КС. Заметим, что корректное дизъюнктивное соединение выходных ФАЛ можно осуществить с помощью стыковки исходной КС с вентильной звездой (см. рис. 3.1с).

Схема называется *разделительной по входам (выходам)*, если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так $(p, 1)$ -схема $\Sigma'' = \Sigma''(y_1, \dots, y_p; z_1)$, показанная на рисунке 3.1с, является разделительной по входам схемой, которая называется *вентильной звездой порядка p* . Примером разделительной по выходам (входам) КС может служить $(1, 2^n)$ (соответственно $(2^n, 1)$) контактное дерево порядка n (см. рис. 1.1).

Будем говорить, что КС Σ от БП x_1, \dots, x_n *разделительна* на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_\alpha$. Следующее утверждение является обобщением известной леммы Шеннона (см. [32, 14]).

Лемма 3.1. *Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$, а F, F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда*

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'', \quad (3.2)$$

если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Доказательство. Пусть КС Σ является сначала результатом бесповторной стыковки (p, q) -КС Σ' и (q, s) -КС Σ'' от БП x_1, \dots, x_n . Пусть, кроме того, v' (v'') — произвольная вершина КС Σ' (соответственно Σ''), а ФАЛ f'_j (соответственно f''_j), $j \in [1, q]$, — ФАЛ проводимости от вершины v' к j -му выходу в КС Σ' (соответственно от j -го входа к вершине v'' в КС Σ''). Докажем, что для ФАЛ f — ФАЛ проводимости от вершины v' к вершине v'' в КС Σ , — справедливо неравенство

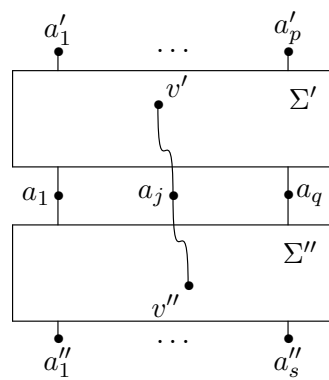
$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (3.3)$$

которое переходит в равенство

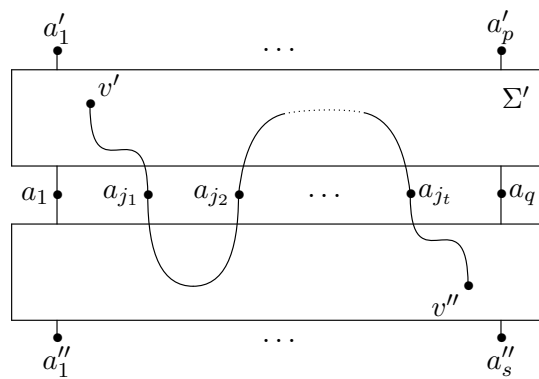
$$f(x_1, \dots, x_n) = f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (3.4)$$

если КС Σ' разделительна по выходам или КС Σ'' разделительна по входам.

Действительно, пусть $a_j, j \in [1, q]$, — вершина КС Σ , которая получается в результате присоединения j -го входа КС Σ'' к j -му выходу КС Σ' (см. рис. 3.2а). Справедливость неравенства (3.3) следует из того, что его правая



a)



b)

Рис. 3.2: к доказательству леммы 3.1

часть описывает «суммарную» проводимость тех $(v' - v'')$ -цепей КС Σ , которые проходят через вершины a_1, \dots, a_q ровно один раз (см. рис. 3.2а). Любая другая $(v' - v'')$ -цепь КС Σ проходит через указанные вершины не меньше трех раз (см. рис. 3.2б) и в случае разделительности КС Σ' по выходам или разделительности КС Σ'' по входам имеет нулевую проводимость.

Из (3.3) и (3.4) непосредственно вытекает (3.2) с учетом того, что при $v' = a'_i$ и $v'' = a''_j$, где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, s]$, левая(правая) часть этих соотношений равна элементу матрицы F (соответственно $F' \cdot F''$), расположенному в i -й строке и j -м столбце.

Пусть теперь КС Σ получается из КС Σ'' в результате применения операции отождествления входов, то есть Σ эквивалентна бесповторной стыковке вида $\Sigma'' (\Sigma')$, где КС Σ' состоит из проводящей звезды и тождественных вершин. В этом случае неравенство (3.2) имеет вид $F \geq \widehat{F}''$, где матрица \widehat{F}'' получается из матрицы F'' в результате поразрядной дизъюнкции строк, соответствующих отождествляемым входам КС Σ'' , и по-прежнему переходит в равенство, если КС Σ'' разделительна по входам. В последнем случае, кроме того, из аналогичного равенства, связанного с КС Σ'' , которая получается из КС Σ'' в результате объявления ее входов входами и, одновременно, выходами $\check{\Sigma}''$, следует разделительность КС Σ по входам.

Заметим, наконец, что стыковка общего вида $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ сводится к последовательному выполнению отождествления входов вида $\widehat{\Sigma}'' = \Sigma'' (\check{\Sigma}'')$ и бесповторной стыковки вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}'' (\widehat{\Sigma}')$, где КС $\check{\Sigma}''$ состоит из проводящей звезды и тождественных вершин, а КС $\widehat{\Sigma}'$ получается из КС Σ' снятием некоторых выходов. При этом неравенство (в случае разделительности КС Σ'' по входам равенство) (3.2) для КС Σ , Σ' , Σ'' вытекает из установленных выше аналогичных соотношений для КС $\widehat{\Sigma}''$, $\check{\Sigma}''$, Σ'' и КС Σ , $\widehat{\Sigma}'$, $\widehat{\Sigma}''$ в силу ассоци-

ативности произведения матриц. Случай разделительности КС Σ' по выходам рассматривается аналогично.

Лемма доказана. □

Следствие 1. *В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ , $\Sigma = \Sigma''(\Sigma)$, которая соответствует выходу КС Σ' , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ' , то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.*

Действительно, полагая $v' = a'_i$ и $v'' = a_j$, где $i \in [1, p]$, а $j \in [1, q]$, из (3.4) получим требуемое равенство $f = f'_j$. Случай стыковки общего вида рассматривается аналогично.

Следствие 2. *Равенство (3.2) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.*

§4 Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения. Метод Шеннона

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и π -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [21] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Рассмотрим сначала специальный частный случай корректной суперпозиции КС — операцию присоединения к выходам одноходовой КС одного или двух противоположных контактов, которая заключается в следующем. Пусть $(1, m)$ -КС Σ получается из $(1, \check{m})$ -КС $\check{\Sigma}$ в результате добавления но-

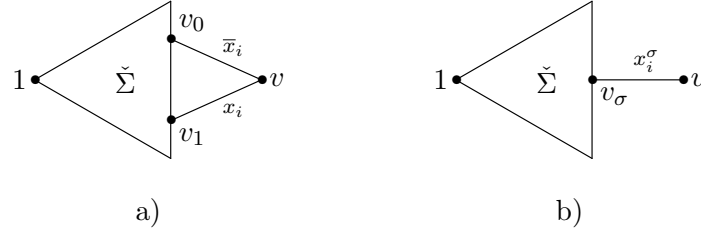


Рис. 4.1: присоединение одного или двух противоположных контактов

вой выходной вершины v , которая соединяется с выходными вершинами v_0 и v_1 КС $\tilde{\Sigma}$ контактами \bar{x}_i и x_i соответственно (см. рис. 4.1a). Тогда в вершинах v_0 и v_1 КС Σ в силу нулевой проводимости между входами присоединяемой (2, 1)-КС реализуются те же самые ФАЛ g_0 и g_1 , что и в КС $\tilde{\Sigma}$, а в вершине v — ФАЛ g вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1. \quad (4.1)$$

Аналогичные соотношения будут справедливы и тогда, когда вершина v КС Σ связана с вершиной v_σ только одним контактом вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$ (см. рис. 4.1b). В этом случае в вершине v КС Σ реализуется ФАЛ

$$g = x_i^\sigma g_\sigma, \quad (4.2)$$

а в вершине v_σ по-прежнему реализуется ФАЛ g_σ .

Описанные выше операции присоединения одного или двух противоположенных контактов очевидным образом распространяются на случай КС с несколькими входами. Кроме того, они допускают моделирование в классе СФЭ в базисе B_0 . Так, переход от СФЭ \tilde{U} , $\tilde{U} \in \mathcal{U}^C$, которая реализует в выходных вершинах v_0 и v_1 ФАЛ g_0 и g_1 соответственно, к СФЭ U , $U \in \mathcal{U}^C$, которая реализует ФАЛ g , удовлетворяющую (4.1) ((4.2)), показан на рис. 4.2a (соответственно 4.2b).

Заметим, что при этом разложение (4.1) в случае $g_{\bar{\sigma}} \equiv 1$ эквивалентно представлению

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma},$$

схемная реализация которого показана на рис. 4.2с.

Определим, далее, *каскадную* КС как приведенную КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается *полной*, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта. Так, например, к числу ККС относится контактное дерево, показанное на рис. 1.1, причем соответствующее ему $(2^n, 1)$ -КД является полной ККС.

Заметим, далее, что, в силу отмеченных выше свойств рассматриваемых операций присоединения контактов, ККС имеет нулевые ФАЛ проводимости между своими входами. Отсюда следует, что в каждой вершине ККС реализуется столбец, в котором никакие две ФАЛ не обращаются в единицу одновременно, причем в случае полной ККС дизъюнкция всех ФАЛ этого столбца дает 1. Так, в частности, в каждой вершине полной ККС с двумя входами реализуется столбец из двух противоположных ФАЛ.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется *неполной вершиной* этой ККС. Будем говорить, что ККС Σ'' является *дополнением* неполной ККС Σ' , если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом, очевидно,

$$L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma'), \quad (4.3)$$

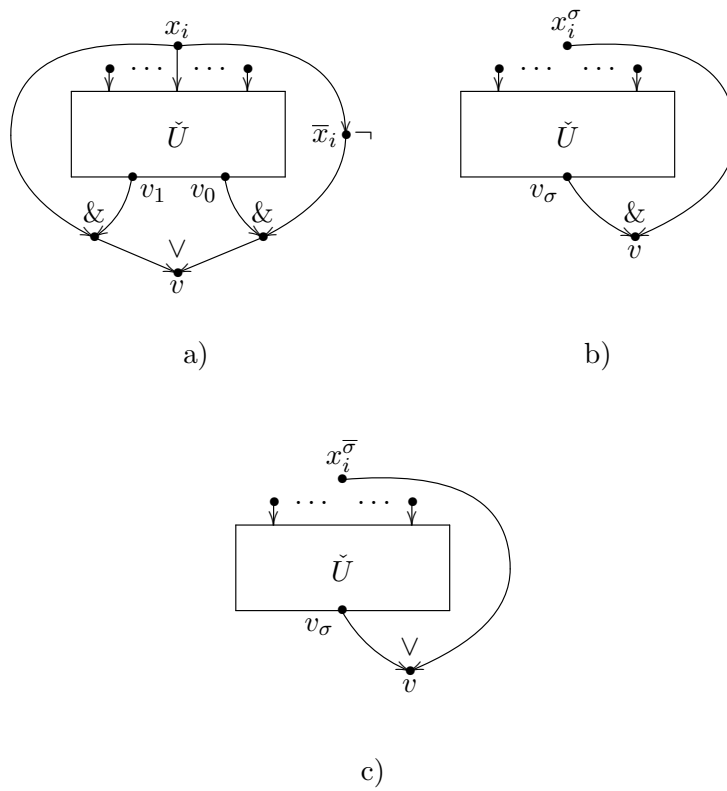


Рис. 4.2: к моделированию операций присоединения контактов в классе СФЭ

а объединение Σ' и Σ'' является полной ККС. Дополнение Σ'' к полной ККС Σ с 1 входом будем называть *инверсной* к Σ' ККС. Заметим, что ККС Σ'' , в силу отмеченных выше свойств полных ККС, реализует систему ФАЛ \bar{F}' , если ККС Σ' реализует систему ФАЛ F' . Таким образом, в силу (4.3) справедливо следующее утверждение

Лемма 4.1. *Если $(1, m)$ -ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$, то существует $(1, m)$ -ККС Σ'' , которая реализует систему ФАЛ $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$ и для которой $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.*

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики $F = (f_1, \dots, f_m)$, $F \in P_2^m(n)$, строить $(1, m)$ -КС Σ_F , $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$, и СФЭ U_F , $U_F \in \mathcal{U}^C$, которые реализуют F . Будем считать, что все ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m системы F различны, отличны от констант, и для каждой БП x_i , $1 \leq i \leq n$, среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от x_i .

Разложим ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m сначала по БП x_1 , потом по БП x_2 и так далее. При этом построим последовательности множеств G_i и \hat{G}_i , состоящих из ФАЛ от БП x_i, x_{i+1}, \dots, x_n , где $i = 1, 2, \dots, n$, такие, что

1. G_i состоит из всех различных ФАЛ $g(x_i, \dots, x_n)$ вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $1 \leq j \leq m$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$;

2. \hat{G}_i состоит из всех различных функций g , $g \in G_i$, которые существенно зависят от x_i .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \hat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$ не пусты и попарно не пересекаются.

Заметим, что любую ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, где $1 \leq i \leq n$, можно представить в виде (4.1)

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1,$$

где $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$, и, следовательно, $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$ для всех σ , $\sigma \in B$. Если при этом для некоторого σ , $\sigma \in B$, ФАЛ g_σ равна 0, то вместо (4.1) будем использовать разложение (4.2)

$$g = x_i^\sigma g_\sigma,$$

где $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$.

Построим КС $\check{\Sigma}_F$, которая реализует систему ФАЛ \vec{G}_F , где $G_F = \widehat{G}_1 \cup \dots \cup \widehat{G}_n$ с помощью операций присоединения одного или двух противоположных контактов. При этом для каждого i , $i = n, (n-1), \dots, 1$, каждая ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, реализуется согласно (4.1) ((4.2)) на выходе v , который при $\alpha = 0, 1$ (соответственно $\alpha = \sigma$) соединен контактом вида x_i^α с тем выходом v_α , где реализуется ФАЛ $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$ так, как это показано на рис. 4.1а (соответственно рис. 4.1б).

Заметим, что указанное присоединение одного или двух противоположенных контактов не изменяет ФАЛ, реализуемые в вершинах v_α , $\alpha \in \{0, 1\}$.

Для получения искомой КС Σ_F достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС $\check{\Sigma}_F$, в которых реализуются ФАЛ, отличные от f_1, \dots, f_m .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ \check{U}_F , реализующая систему ФАЛ \vec{G}_F , с той лишь разницей, что:

1. сначала реализуются все ФАЛ вида \bar{x}_i , $1 \leq i \leq n$, которые встречаются в КС Σ_F ;

2. для всех i , $i = (n-1), \dots, 1$, разложение (4.1), где $g \in \widehat{G}_i$ и $g_0, g_1 \in \check{G}_{i+1}$, реализуется так, как показано на рис. 4.2а, а разложение (4.2), применяемое в случае $g_{\bar{\sigma}} = 0$ (разложение

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} x_i^{\sigma} = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} \quad (4.4)$$

в случае $g_{\bar{\sigma}} = 1$), — так, как показано на рис. 4.2b (соответственно 4.2c);

3. каждая ФАЛ вида $g_{\sigma} x_i^{\sigma}$, используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (4.1) или (4.2) для различных ФАЛ g , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ \check{U}_F в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из F .

Пусть, например, $F = (f_1, f_2)$, где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \widehat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \widehat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \widehat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \widehat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \widehat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}. \end{aligned}$$

На рис. 4.3 показана построенная для данной системы ФАЛ КС $\check{\Sigma}_F$, вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 4.4 — соответствующая ей КС Σ_F , а на рис. 4.5 — СФЭ U_F .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ ℓ_n , где $n \geq 2$, является известная схема

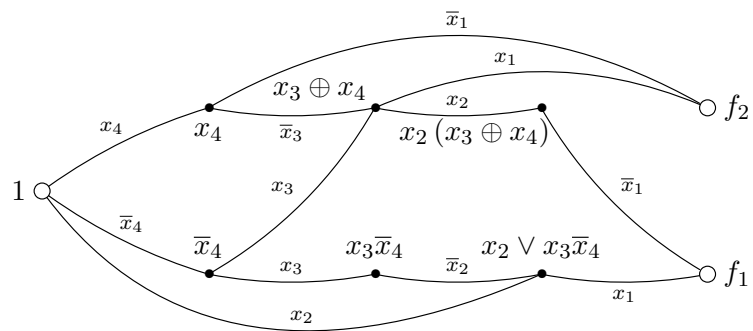


Рис. 4.3: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

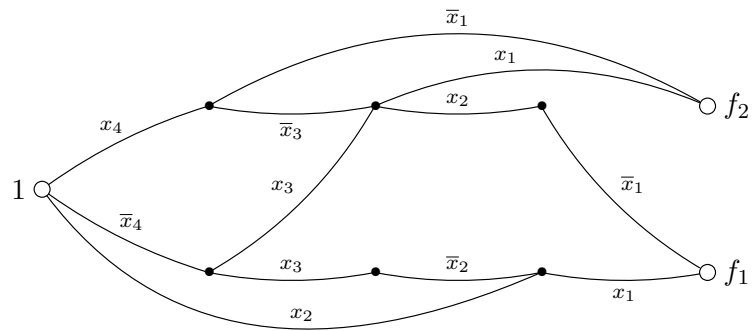


Рис. 4.4: пример КС, построенной методом каскадов

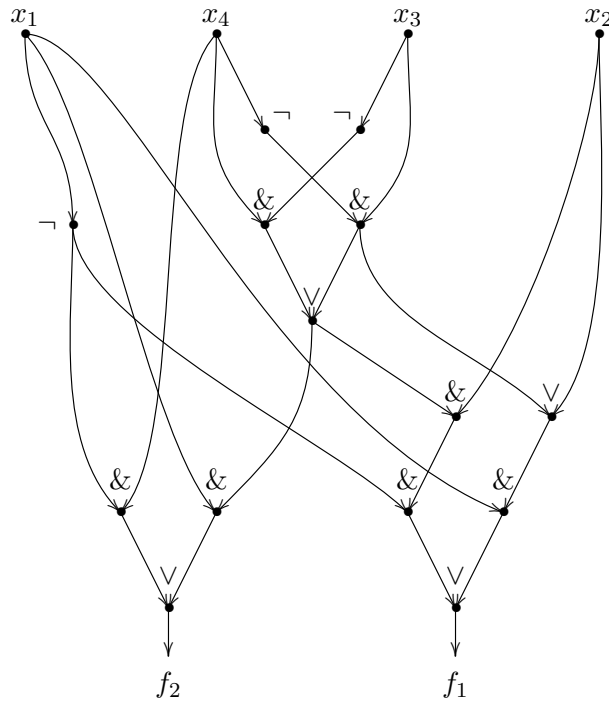


Рис. 4.5: СФЭ для системы ФАЛ F , построенная методом каскадов

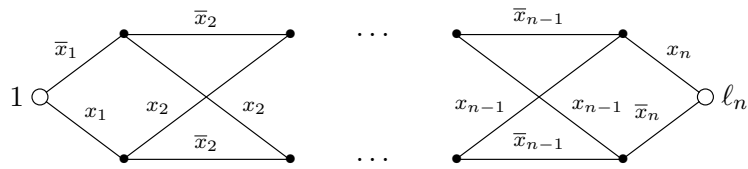


Рис. 4.6: схема Кардо для линейной функции l_n

Кардо [32], показанная на рис. 4.6. Заметим, что эта КС имеет сложность $(4n - 4)$ и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для ℓ_n , $n \geq 2$, по методу каскадов имеет сложность $(7n - 9)$ и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой Σ_n^\oplus сложности $(4n - 4)$, показанной на рис. 2.2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ $\bar{\ell}_n$ (см. лемму 2.3).

При построении по методу каскадов $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики \vec{Q}_n , мы получим контактное дерево порядка n , показанное на рис. 1.1. Как будет показано далее это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный дизъюнктивный дешифратор порядка n и сложности не больше, чем $2^{n+2} - 6$, контактный универсальный многополюсник порядка n и сложности не больше, чем $2 \cdot 2^{2^n}$, а также контактный мультиплексор порядка n и сложности $3 \cdot 2^n - 2$, показанный на рис. 2.1 (см. лемму 2.3). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ μ_n сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка n , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ μ_n сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка 2^n от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем 2^{2^n+1} . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним леммы 1.3 и 2.3 следующим утверждением.

Лемма 4.2. *Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполня-*

ются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [33, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$.

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра q , $1 \leq q \leq n$, и построении схемы Σ_f , реализующей произвольную ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ на основе ее разложения по части переменных:

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (4.5)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ при всех σ'' , $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ_f представляет собой суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексор порядка $(n - q)$ от адресных БП x'' , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника Σ' порядка q от БП x' в соответствии с (4.5).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ указанным выше способом КС (СФЭ в базисе B_0) Σ_f , где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка $(n - q)$ (соответственно формула \mathcal{F}_{n-q} из леммы 2.3), а Σ' — универсальный многополюсник из леммы 4.2 (соответственно леммы 1.3). Корректность построенной суперпозиции, т.е. реализация схемой Σ_f ФАЛ f в случае СФЭ очевидна, а в случае КС обеспечивается тем, что её можно представить в виде результата многократной операции присоединения

двух противоположенных контактов, корректность которой была отмечена выше (см. рис. 4.1). Для сложности полученной схемы Σ_f будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$, и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

§5 Нижние мощностные оценки функции Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для функций из специальных классов

Установим теперь ряд нижних оценок для введенных в §1 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [33, 14], который основан на том, что число ФАЛ от БП x_1, \dots, x_n не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n .

Пусть \mathcal{U} — один из рассмотренных в главе 2 классов схем, Ψ — введенный там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса \mathcal{U} относительно Ψ . Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализу-

ют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leq \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(n), n)\| = 2^{2^n}. \quad (5.1)$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}$, δ , где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}(\widehat{\Psi}, n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то } \Psi(f) \geq \widehat{\Psi} \quad (5.2)$$

для не менее чем $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

Верхние оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$, установленные в главе 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (5.1)–(5.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. леммы 4.3, 4.2, 6.2, 6.3 из главы 2) для любых натуральных n и L справедливы неравенства:

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L+n))^{L+1}, \quad (5.3)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}, \quad (5.4)$$

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L, \quad (5.5)$$

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L, \quad (5.6)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[L, n]\| \leq (8n)^{2^D}. \quad (5.7)$$

Лемма 5.1. *Для положительных действительных чисел a , y , q из неравенств*

$$a \log q > 1, \quad (ay)^y \geq q, \quad (5.8)$$

следует неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\log(a \log q)} \left(1 + \frac{\log \log(a \log q)}{\log(ae \log q)} \right), \quad (5.9)$$

где e — основание натуральных логарифмов, а из неравенств $a > 1$, $a^y \geq q$ — неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\log a}. \quad (5.10)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $a = 1$ и $\log q > 1$. В этом случае неравенство (5.9) следует из того, что левая часть (5.8) монотонно возрастает по y , и для

$$y' = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\log \log \log q}{\log (\varepsilon \log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y' \log y' &= \\ &= (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q} (\log \log q - \log \log \log q + \log e \ln (1 + \varepsilon)) \leq \\ &\leq \log q (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{\log \log \log q}{\log \log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log \log q} \right) = \\ &= \log q (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) = \log q (1 - \varepsilon^2) \leq \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $a > 0$ неравенство (5.8) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geq q^a,$$

и поэтому неравенство (5.9) получается из неравенства $y \geq y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $a \log q$, если выполнено условие $a \log q > 1$.

Неравенство (5.10) в случае $a > 1$ получается в результате логарифмирования неравенства $a^y \geq q$ и деления обеих частей полученного неравенства на $\log a$.

Лемма доказана. \square

Теорема 5.1. Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, \dots, 5$ и $n = 1, 2, \dots$, таких, что $\varepsilon_i(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon_i(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства

$$L^C(f) \geq (1 + \varepsilon_1(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.11)$$

$$L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon_2(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (5.12)$$

$$L^K(f) \geq (1 - \varepsilon_3(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.13)$$

$$L^\pi(f) \geq (1 - \varepsilon_4(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (5.14)$$

$$D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_5(n). \quad (5.15)$$

Доказательство. Неравенства (5.11)–(5.14) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем \mathcal{U} с функционалом сложности L неравенства (5.3)–(5.6) на основе мощностного неравенства (5.2), где $\delta = 1/n$ с использованием леммы 5.1, где $q = 2^{2^n}/n$, и

- 1) $a = 8$, $y = L^C(n) + n$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^C$;
- 2) $a = 8n$, $y = L^\Phi(n) + 1$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\Phi$;
- 3) $a = 8n$, $y = L^K(n)$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^K$;
- 4) $a = 12n$, $y = L^\pi(n)$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\pi$.

Действительно, подставляя указанные значения в (5.9) по-

лучим, что доля тех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, для которых

$$\begin{aligned} 1) L^C(f) &\geq \frac{2^n}{n+3} \left(1 + \frac{\log(n+3) - o(1)}{n+5} \right) - n \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n - 3 - o(1)}{n} \right); \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$2) L^\Phi(f) \geq \frac{2^n - \log n}{\log n + 3} - 1 \geq \frac{2^n}{\log n} \left(1 - \frac{3 + o(1)}{\log n} \right); \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} 3) L^K(f) &\geq \frac{2^n}{n+3+\log n} \left(1 + \frac{\log(n+3+\log n) - o(1)}{n+5+\log n} \right) \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left(1 - \frac{3 + o(1)}{n} \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

не меньше, чем $(1 - 1/n)$. Следовательно, неравенство (5.11) ((5.12), (5.13)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon_1(n) = \frac{\log n - 4}{n}$ (соответственно $\varepsilon_2(n) = \frac{4}{\log n}$, $\varepsilon_3(n) = \frac{4}{n}$).

Аналогичным образом устанавливается справедливость (5.14) и (5.15) при $\varepsilon_4(n) = \frac{6}{\log n} = \varepsilon_5(n)$.

Теорема доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} D(n) &\geq n - \log \log n - o(1), \\ L^C(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \\ L^K(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\pi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}. \end{aligned}$$

Мощностные соображения можно использовать при получении нижних оценок для функций Шеннона, связанных с реализацией ФАЛ из класса \mathcal{Q} , $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(1), \mathcal{Q}(2), \dots, \mathcal{Q}(n), \dots$, где

$$\mathcal{Q} \subseteq P_2 \text{ и } \mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n) \neq \emptyset, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть \mathcal{U} — один из рассмотренных в главе 2 классов схем, Ψ — введенный там функционал сложности, а $\Psi(\mathcal{Q}(n))$ — функция Шеннона (для класса схем \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ), связанная с классом ФАЛ \mathcal{Q} , то есть

$$\Psi(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} \Psi(f).$$

Следующее «мощностное» неравенство обобщает равенство (5.1) и вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)\| \geq |\mathcal{Q}(n)|. \quad (5.19)$$

Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона $\Psi(\mathcal{Q}(n))$ на основе известной верхней оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$.

Рассмотрим, в частности, нижние мощностные оценки для функций $L^C(\mathcal{Q}(n))$ и $L^K(\mathcal{Q}(n))$, то есть функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из класса \mathcal{Q} схемами из классов \mathcal{U}^C и \mathcal{U}^K соответственно. На основе мощностных соображений (см. (5.19)) аналогично тому, как это было сделано в теореме 5.1 для случая $\mathcal{Q} = P_2$, доказывается следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Для класса ФАЛ \mathcal{Q} такого, что $n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right)$ ($\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|)$), выполняются следующие асимптотические неравенства*

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}, \quad (5.20)$$

$$\text{(соответственно } L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\text{)}. \quad (5.21)$$

Пусть, например, класс \mathcal{Q} состоит из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП. Легко видеть, что при этом

$|\mathcal{Q}(n)| = 2^{\frac{3}{4}2^n}$, так как $f \in \mathcal{Q}(n)$ тогда и только тогда, когда вторая и третья четверти столбца значений $\tilde{\alpha}_f$ совпадают. Следовательно, в силу леммы 5.2, отсюда вытекает, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}. \quad (5.22)$$

§6 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим метод синтеза схем из класса \mathcal{U}^C , который был предложен О.Б. Лупановым [14] и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона $L^C(n)$. Этот метод, как и метод Шеннона (см. §4), основан на представлении реализуемой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в виде (4.5) и построении искомой СФЭ Σ_f , реализующей ФАЛ f , как суперпозиции схем вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$. При этом схема Σ'' по-прежнему является мультиплексором порядка $(n - q)$ от адресных БП $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, а схема Σ' реализует все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ берется не с выхода универсального многополюсника от БП x' , а реализуется на выходе Σ' как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества G , $G \subseteq P_2(q)$, реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы Σ' .

Множество ФАЛ G , $G \subseteq P_2(m)$, называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка m и ранга p* , если любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p,$$

где $g_i \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$. Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Пусть $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ — разбиение куба B^m , и пусть для всех i , $i = 1, \dots, p$, ФАЛ $\psi_i(x_1, \dots, x_m)$ — характеристическая ФАЛ множества π_i , а $G^{(i)}$ — множество всех тех ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, которые обращаются в 0 вне π_i . Заметим, что множество ФАЛ G вида

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка m и ранга p . Действительно, любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p, \quad (6.1)$$

где $g_i = \psi_i g$ и, следовательно, $g_i \in G^{(i)}$ для всех i , $i = 1, \dots, p$. Заметим также, что мощность множества $G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, равна 2^{s_i} , где $s_i = |\pi_i|$, и что множество $G^{(i)} \cap G^{(j)}$ состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если $1 \leq i < j \leq p$. Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{s_i} \leq p2^s,$$

где

$$s = \max_{1 \leq i \leq p} s_i.$$

Указанное ДУМ G будем называть ДУМ, *связанным с разбиением Π* . Компоненты разбиения Π будем при этом называть *полосами* ДУМ G , а ФАЛ $\psi_1 = \chi_{\delta_1}, \dots, \psi_p = \chi_{\delta_p}$ — его *характеристическими* ФАЛ. Заметим, что характеристические ФАЛ попарно ортогональны, то есть одновременно в 1 не обращаются, и принадлежат G . Заметим также,

	$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1} \ x_m$	$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \dots \mathfrak{g}_{2^s}$	$\mathfrak{g}_{2^s+1} \dots \mathfrak{g}_{2^{s+1}-1}$	\dots	$\mathfrak{g}_{(p-1)(2^s-1)+2} \dots \mathfrak{g}_\lambda$	
π_1	0 0 ... 0 0	0 1 ... 1	0 ... 0	...	0 ... 0	$s=s_1$
	0 0 ... 0 1	0 0 ... 1	0 ... 0	...	0 ... 0	
	
	...	0 0 ... 1	0 ... 0	...	0 ... 0	
π_2	...	0 0 ... 0	1 ... 1	...	0 ... 0	$s=s_2$
	...	0 0 ... 0	0 ... 1	...	0 ... 0	
	
	...	0 0 ... 0	0 ... 1	...	0 ... 0	
...	
π_{p-1}	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	$s=s_{p-1}$
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	
	
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	
π_p	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	1 ... 1	$s_p \leq s$
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 1	
	
	...	0 0 ... 0	0 ... 0	...	0 ... 0	
		$\leftarrow 2^s \rightarrow$	$\leftarrow 2^s - 1 \rightarrow$	$\leftarrow 2^s p - 1 \rightarrow$		

Рис. 6.1: к определению дизъюнктивно-универсального множества

что представление (6.1) в случае рассматриваемого ДУМ G равносильно представлению:

$$g = \psi_1 g_1 \vee \psi_2 g_2 \vee \dots \vee \psi_p g_p \tag{6.2}$$

Будем считать *стандартным* ДУМ *порядка* m и *высоты* s , где

$$s \leq 2^m, \tag{6.3}$$

ДУМ ранга p , $p = \lceil 2^m/s \rceil$, связанное с разбиением $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ куба B^m на последовательные отрезки, для которого номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j , если $i < j$, и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s, \\ s_p = 2^m - (p-1)s \leq s. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таблица значений ФАЛ ДУМ G приведена на рис. 6.1.

Из проведенных построений и отмеченных выше свойств стандартного ДУМ вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 6.1. *Для любых натуральных p , m и s , где $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s , которое является ДУМ ранга p и для которого:*

- 1) $\lambda = |G| \leq p2^s$;
- 2) система из p характеристических ФАЛ ψ_1, \dots, ψ_p ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, и соответствующих ФАЛ g_1, \dots, g_p из G справедливо не только представление (6.1), но и представление (6.2).

Теорема 6.1. *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (6.5)$$

Доказательство. Пусть $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ для всех σ'' из B^{n-q} . Пусть, далее, Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от адресных БП x'' и информационных БП $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$, который построен в соответствии с леммой 2.3, представляет собой формулу \mathcal{F}_{n-q} и реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_{n-q}(x'', y)$.

Пусть s — некоторый параметр, удовлетворяющий (6.3), а G — стандартное ДУМ порядка $m = q$ и высоты s , удовлетворяющее требованиям леммы 6.1. Обозначим через Σ_G СФЭ, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} и представляет собой объединение схем, построенных для каждой из них в соответствии с леммой 1.2. Заметим, что, в силу леммы 2.3, (1.3) и леммы 6.1, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma'') &\leq 4 \cdot 2^{n-q}, \\ L(\Sigma_G) &\leq 3p2^{s+q}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Схема Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов как ФАЛ $g(x')$ вида (6.1) с помощью СФЭ из $(p-1)$ ФЭ \vee , входы которой присоединены к соответствующим выходам Σ_G . Искомая СФЭ Σ_f имеет вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ и реализует ФАЛ f в соответствии с разложением (4.5). Для нее, в силу (6.6), будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq \\ &\leq 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}, \end{aligned}$$

из которых, выбрав значения параметров

$$\begin{aligned} s &= \lceil n - 5 \log n \rceil, \\ m = q &= \lceil 2 \log n \rceil, \end{aligned}$$

удовлетворяющие (6.3), в соответствии с леммой 6.1 получим

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq \frac{2^n}{n - 5 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Следствие. Из (6.5) с учётом следствия из теоремы 5.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Отметим, в заключение, что в соответствии с (6.5) и теоремой 5.1 сложность $L^C(f)$ для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, асимптотически равна функции Шеннона $L^C(n)$, то есть сложности самой сложной ФАЛ из $P_2(n)$. Тем самым, в отличие от класса ДНФ (см. §7 главы 1), в классе схем \mathcal{U}^C имеет место т. н. эффект Шеннона — асимптотическое равенство сложности почти всех ФАЛ и сложности самой сложной ФАЛ от заданного числа БП, стремящегося к бесконечности.

§7 Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Множество δ , $\delta \subseteq B^q$, называется m -регулярным множеством наборов куба B^q , если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы¹ длины m наборов из δ различны. Заметим, что m -регулярному множеству δ , $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\psi(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g , $g \in P_2(q)$, совпадает на m -регулярном множестве наборов δ , $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП x_{m+1}, \dots, x_q . При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q .

¹Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его префиксом (соответственно суффиксом).

Для наборов $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ через $\beta \oplus \alpha$ будем обозначать набор вида $(\beta_1 \oplus \alpha_1, \dots, \beta_q \oplus \alpha_q)$. Для множества δ , $\delta \subseteq B^q$, и набора α , $\alpha \in B^q$, определим множество $\delta \oplus \alpha$ как множество различных наборов вида $\beta \oplus \alpha$, где $\beta \in \delta$, то есть множество, получающееся из множества δ сдвигом (параллельным переносом) на набор α . Заметим, что для m -регулярного множества δ , $\delta \subseteq B^q$, и любого набора α , $\alpha \in B^q$, множество $\delta \oplus \alpha$ также является m -регулярным. Если при этом $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$, то есть

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \gamma),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q-m})$ и $\nu(\gamma) = \nu(\alpha)$, а множество наборов δ соответствует системе ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_{q-m})$, то множество наборов $\delta \oplus \alpha$ будет соответствовать системе ФАЛ $(g_1 \oplus \gamma_1, \dots, g_{q-m} \oplus \gamma_{q-m})$, получающейся из системы g инвертированием некоторых ФАЛ.

Лемма 7.1. *Для любых натуральных m , λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m -регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП x_{m+1}, \dots, x_q , либо с её отрицанием.*

Доказательство. Пусть $\delta = \delta_1$ — m -регулярное множество, соответствующее системе ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$, и пусть $\delta_i = \delta_1 \oplus \alpha$, где $\nu(\alpha) = i - 1$, для всех i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$. Из построения системы множеств $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ следует, что каждое из них обладает требуемым свойством, связанным с можелированием ФАЛ из g с помощью БП.

Покажем теперь, что Δ — покрытие куба B^q . Для этого возьмем произвольный набор из B^q вида (β, γ) , где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, а по нему найдем в множестве δ набор вида $(\beta, \hat{\gamma})$, который имеется в δ в силу m -регулярности этого

множества. Следовательно,

$$(\beta, \gamma) = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \underbrace{(0, \dots, 0)}_m, \hat{\gamma} \oplus \gamma = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \alpha,$$

где $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$. Таким образом, система Δ образует покрытие куба B^m .

С другой стороны, из m -регулярности δ следует m -регулярность любого из множеств δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{q-m}} |\delta_i| = 2^m 2^{q-m} = 2^q.$$

Следовательно, система Δ образует разбиение куба B^q .

Лемма доказана. \square

Замечание. Если в условиях леммы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j-1)$, то $g_i \equiv x_{i+m}^{\alpha_j}$ на δ_j .

Применим технику моделирования ФАЛ из ДУМ переменными для синтеза формул в стандартном базисе.

Теорема 7.1 (ср. [14]). *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в \mathcal{U}^Φ существует реализующая ее формула \mathcal{F}_f , для которой*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right). \quad (7.1)$$

Доказательство. Пусть параметры m , s и p удовлетворяют соотношениям

$$s \leq 2^m, \quad p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad m + p \cdot 2^s \leq n,$$

а G — стандартное ДУМ порядка m и высоты s , для которого $|G| = \lambda \leq p \cdot 2^s$ (см. §6). Пусть, далее, $q = m + \lambda$ и, следовательно, $q \leq n$, а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^\lambda})$ — разбиение куба B^q , полученное по лемме 7.1 для системы ФАЛ \vec{G} .

Положим $x' = (x_1, \dots, x_q)$ и заметим, что произвольная ФАЛ h , $h \in P_2(q)$, на любой компоненте δ_i , $i \in [1, 2^\lambda]$, в силу ее m -регулярности совпадает с некоторой ФАЛ $\hat{h}(x_1, \dots, x_m)$. При этом ФАЛ \hat{h} равна дизъюнкции p ФАЛ из ДУМ G , каждая из которых в силу леммы 7.1 совпадает на δ_i с буквой одной из БП x_{m+1}, \dots, x_q . Следовательно, ФАЛ h совпадает на δ_i с ЭД ранга p от указанных БП.

Для ФАЛ $f(x)$ из $P_2(n)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ рассмотрим ее представление в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left(\bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') f_{\sigma''}(x') \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \left(\bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} J_{\sigma'',i}(x') \right), \quad (7.2) \end{aligned}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ множества δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, а ЭД $J_{\sigma'',i}$ ранга p от БП x_{m+1}, \dots, x_q , совпадает на δ_i с ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$.

Построим для ФАЛ f на основе (7.2) формулу $\tilde{\mathcal{F}}_f$ с поднятыми отрицаниями, которая имеет вид

$$\tilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \mathcal{F}_{n-q} \left(x'', J_{0,i}, \dots, J_{1,i} \right),$$

где $\mathcal{F}_{n-q}(x'', y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ — неповторная по информационным БП формула из леммы 2.3, реализующая ФАЛ μ_{n-q} , а \mathfrak{A}_i , $i \in [1, 2^\lambda]$, — совершенная ДНФ ФАЛ χ_i .

Пусть, далее, формула \mathcal{F}_f получается из формулы $\tilde{\mathcal{F}}_f$ оптимизацией ЭД по числу отрицаний, то есть заменой каждой ЭД $J_{\sigma'',i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \bar{x}_{j_{t+1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{j_p}$, где $t \leq p$, формулой

$\widehat{J}_{\sigma'', i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_p}}$. Заметим, что число ФЭ \neg во всех формулах \mathfrak{A}_i , $i \in [1, 2^\lambda]$, равно половине их суммарного ранга, что в каждой формуле вида $\widehat{J}_{\sigma'', i}$ имеется один ФЭ \neg , и напомним (см. лемму 2.3), что $R(\mathcal{F}_{n-q}) \leq 3 \cdot 2^{n-q}$ и $L_{\neg}(\mathcal{F}_{n-q}) \leq 2^{n-q}$. Следовательно, в силу леммы 2.1 главы 2,

$$L_{\&, \vee}(\mathcal{F}_f) \leq 2^{q-m} (q \cdot 2^m + (p-1)2^{n-q} + 3 \cdot 2^{n-q}), \quad (7.3)$$

$$L_{\neg}(\mathcal{F}_f) \leq q \cdot 2^{q-1} + 2^{n-m}. \quad (7.4)$$

Выбирая значения параметров m и s так, что

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor - 1, \quad s = \lfloor \log n - 2 \log \log n \rfloor - 1,$$

и подставляя эти значения в (7.3), (7.4), получим неравенство

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n - 2 \log \log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right),$$

из которого для сложности формулы \mathcal{F}_f следует оценка (7.1).

Теорема доказана. \square

Следствие. Из (7.1) с учётом нижних оценок следствия из теоремы 5.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

§8 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых классов

Заметим сначала, что асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ из §6 без существенных изменений переносится на класс контактно-вентильных схем (КВС), в которых наряду с контактами можно использовать «вентили», то есть ориентированные ребра, проводящие только в направлении своей

ориентации. Действительно, для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, реализующая ее $(1, 1)$ -КВС $\tilde{\Sigma}_f$ может быть получена на основе разложения (4.5) так же, как и СФЭ Σ_f из теоремы 6.1. Она является результатом корректной суперпозиции вида $\tilde{\Sigma}_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП x'' , а $(1, 2^{n-q})$ -КВС Σ' реализует систему всех ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ' по-прежнему содержит в качестве подсхемы $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующую систему ФАЛ \vec{G} на основе леммы 1.2, и реализует каждую ФАЛ $g(x')$ типа $f_{\sigma''}(x')$ на основе ее представления (6.1) в виде дизъюнкции $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$ с помощью присоединения входов вентильной звезды порядка p к соответствующим выходам КС Σ_G (см. рис. 8.1a), которое является корректной суперпозицией. Сложность построенной КВС $\tilde{\Sigma}_f$ при тех же значениях параметров, что и в теореме 6.1, будет удовлетворять неравенству (6.5).

Напомним (см. §6), что в силу специфики стандартного ДУМ G вместо представления (6.1) для ФАЛ g можно использовать эквивалентное (6.1) представление (6.2) вида

$$g = \psi_1 \cdot g_1 \vee \dots \vee \psi_p \cdot g_p \quad (8.1)$$

и на его основе реализовать ФАЛ g с помощью корректной суперпозиции т.н. итеративно-контактных схем, показанной на рис. 8.1b, где ФАЛ ψ_1, \dots, ψ_p управляют проводимостью соответствующих контактов. Асимптотически наилучший метод синтеза КС связан с «моделированием» этой суперпозиции и представления (8.1) на компонентах подходящего m -регулярного разбиения куба B^{m+p} .

Пусть δ — m -регулярное множество наборов куба B^{m+p} , соответствующее системе ФАЛ $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ (см. рис. 8.2a), а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^p})$ — построенное для нее по лемме 7.1 разбиение куба B^{m+p} . Заметим, что любая ФАЛ g , $g \in P_2(m+p)$,

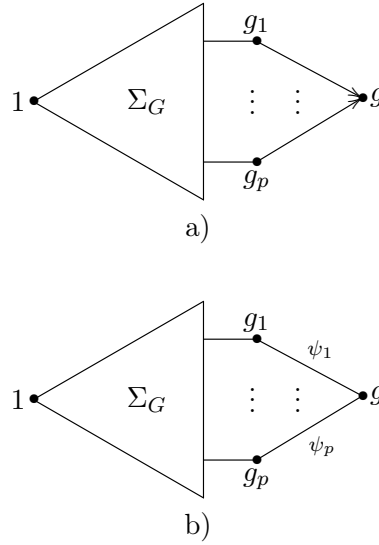


Рис. 8.1: Корректная реализация дизъюнкции ФАЛ g_1, \dots, g_p в классах КВС и ИКС

на любой компоненте этого разбиения вида $\check{\delta} \oplus \alpha$, где

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+p}),$$

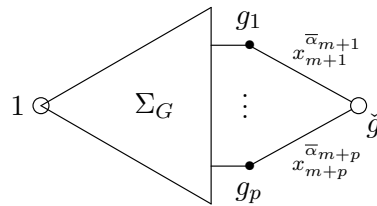
совпадает с ФАЛ

$$\check{g} = x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \dots \vee x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}} \cdot g_p, \quad (8.2)$$

где $g_i = g\psi_i \in G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$. При этом ФАЛ \check{g} может быть реализована в результате операции присоединения звезды из контактов вида $x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}}, \dots, x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}}$ к выходам $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующей систему ФАЛ \vec{G} , так, как это показано на рис. 8.2b. Заметим также, что указанная операция суперпозиции является корректной на множестве наборов $\check{\delta} \oplus \alpha$

	$x_1 \dots x_{m-1} x_m$	ψ_1	ψ_2	\dots	ψ_p
π_1	0 ... 0 0	1	0		0
	0 ... 0 1	1	0		0
	...	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
	...	1	0		0
π_2	...	0	1		0
	...	0	1		0
	...	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
	...	0	1		0
	...	\dots	\dots	\dots	\dots
π_p	...	0	0		1
	...	0	0		1
	...	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
	1 ... 1 1	0	0		1

a)



b)

Рис. 8.2: m -регулярное множество $\check{\delta}$ и связанная с ним суперпозиция КС

в силу того, что из контактов присоединяемой $(p, 1)$ -КС на любом наборе этого множества проводит только один.

Теорема 8.1 (ср. [14]). *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (8.3)$$

Доказательство. Пусть $q = m + p$, а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^p})$ — описанное выше разбиение куба B^q , с помощью которого ФАЛ f можно представить в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^p} \chi_i(x') \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \check{g}_{\sigma'', i}(x'), \quad (8.4)$$

где χ_i — характеристическая ФАЛ δ_i , а в качестве ФАЛ $f_{\sigma'', i}$ при всех $\sigma'', \sigma'' \in B^{n-q}$, и $i, i \in [1, 2^p]$, берется ФАЛ $\check{g}_{\sigma'', i}$ вида (8.2), совпадающая с ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ на компоненте $\delta_i = \check{\delta} \oplus \alpha$.

Пусть Σ_G — $(1, \lambda)$ -КС, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} по их совершенным ДНФ на основе контактного дерева (см. лемму 1.2 и оценку (1.2)). Для каждого $i, i = 1, \dots, 2^p$, построим $(1, 2^{n-q})$ -КС Σ'_i (см. рис. 8.3а), которая содержит КС Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $\check{g}_{\sigma'', i}$ вида (8.2) с помощью корректной на множестве наборов δ_i суперпозиции, показанной на рисунке 8.2б. Пусть, далее, $(1, 2^{n-m})$ -КС Σ' получается в результате отождествления входов у построенных выше КС $\Sigma'_i, i \in [1, 2^p]$, и реализует систему из всех ФАЛ вида $\check{g}_{\sigma'', i}$, где $\sigma'' \in B^{n-q}, i \in [1, 2^p]$. Заметим, что при этом выполняются неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_G) &\leq \lambda 2^{m+1}, \\ L(\Sigma'_i) &\leq L(\Sigma_G) + p 2^{n-q}, \\ L(\Sigma') &\leq p 2^{n-m} + \lambda 2^{q+1}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

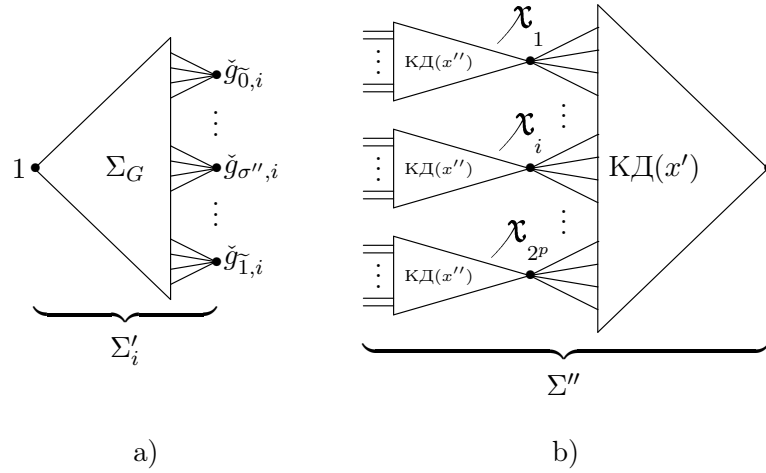


Рис. 8.3: к доказательству теоремы 8.1

Построим, наконец, каскадную $(2^{n-m}, 1)$ -КС Σ'' , которая реализует столбец из всех ФАЛ вида $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $i \in [1, 2^p]$ и $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n) \in B^{n-q}$. Эта КС получается в результате объединения 2^p схем типа $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП x'' , к выходам которых присоединены входы $(2^p, 1)$ -КС, реализующей столбец из ФАЛ χ_i , $i \in [1, 2^p]$, и получающейся из $(2^q, 1)$ -КД от БП x' в результате соответствующего отождествления входов (см. рис. 8.3b). Легко видеть, что при этом

$$L(\Sigma'') \leq 2^{q+1} + 2^{n-m+1}. \quad (8.6)$$

Искомая КС Σ_f является результатом корректной стыковки вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, полученной в результате присоединения входов КС Σ'' к выходам КС Σ' в соответствии с представлением (8.4), сложность которой, в силу (8.5)–(8.6),

удовлетворяет неравенству

$$L(\Sigma_f) \leq (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}.$$

Из этого неравенства при

$$m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor \quad \text{и} \quad s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil,$$

при которых выполнены условия

$$s \leq 2^m, \quad p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil \quad \text{и} \quad q = m + p \leq n,$$

вытекает неравенство (8.3) для сложности Σ_f , так как

$$\begin{aligned} (p+2)2^{n-m} &\leq \frac{2^n}{s} + 3 \cdot 2^{n-m} = \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right), \\ (\lambda+1)2^{q+1} &\leq p2^s \cdot 2^{m+p+2} \leq \frac{2^{2m+s+p+3}}{s} \leq \\ &\leq \frac{32}{s} 2^{n-\sqrt{n}+3\log n} = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Следствие. Из (8.3) с учетом нижней оценки (5.13) вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda+1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа. Для этого достаточно контакты всех звезд, показанных на рис. 8.2b, перераспределить в звезды из однотипных контактов, «центрами» которых являются выходы подсхем Σ_G схем Σ'_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, а любой из остальных контактов КС Σ_f считать отдельной звездой.

Описанные в §§6, 7, 8 асимптотически наилучшие методы синтеза схем ориентированы, вообще говоря, на произвольную или самую «сложную» ФАЛ. Тем не менее, во многих случаях они служат основой асимптотически наилучших методов синтеза СФЭ и КС для ФАЛ из заданного специального класса \mathcal{Q} и позволяют установить для этого класса «стандартные» (см. (5.20) и (5.21)) асимптотики вида

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) \sim L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}{\log |\mathcal{Q}(n)|}. \quad (8.7)$$

Заметим, что асимптотики (8.7) устанавливаются, как правило, путем сведения задачи синтеза СФЭ или КС для любой ФАЛ из $\mathcal{Q}(n)$ к задаче синтеза соответствующей схемы для системы из одной или нескольких произвольных ФАЛ от меньшего числа БП. При этом требуется, чтобы двоичный логарифм числа тех систем ФАЛ, к реализации которых сводится реализация ФАЛ из $\mathcal{Q}(n)$, был асимптотически равен $\log |\mathcal{Q}(n)|$, а сложность вспомогательных ФАЛ, обеспечивающих данное сведение, была бы существенно меньше правой части (5.20) или (5.21).

Возьмем в качестве примера введенный выше класс ФАЛ \mathcal{Q} , состоящий из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП, и докажем, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \lesssim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n},$$

то есть, с учетом (5.22), установим для него асимптотику (8.7) вида

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Действительно, разлагая ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ из $\mathcal{Q}(n)$ по БП x_1, x_2 , получим

$$f(x_1, x_2, x') = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2) \in B^2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f_{\sigma_1, \sigma_2}(x'), \quad (8.8)$$

где $x' = (x_3, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma_1, \sigma_2}(x') = f_{\sigma_1, \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2, x')$, причем $f_{01} = f_{10}$ в силу симметричности ФАЛ f по БП x_1, x_2 . Искомая СФЭ Σ_f реализует ФАЛ f в соответствии с (8.8) и имеет вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексорная СФЭ порядка 2 от адресных БП x_1, x_2 , а СФЭ Σ' от БП x' реализует асимптотически наилучшим способом ФАЛ $f_{00}, f_{01} = f_{10}$ и f_{11} от БП x' . Легко видеть, что сложность построенной схемы Σ_f асимптотически не больше, чем $\frac{3}{4} \frac{2^n}{n}$. Аналогичным образом доказывается, что

$$L^K(Q(n)) \sim \frac{3}{4} \frac{2^n}{n}.$$

Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] Журавлев Ю. И. Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] Кузьмин В. А. Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] Ложкин С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] Ложкин С. А. Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

- // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.
- [18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.
- [19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [20] *Низматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [26] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

-
- [28] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [29] Яблонский С. В. Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [30] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [31] Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.
- [32] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [33] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [34] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.