

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

(вариант 2014 г., глава 3)

Москва 2014

Оглавление

Введение	3
3 Синтез и сложность управляющих систем	6
§1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций.	6
§2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.	12
§3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона	20
Литература	30

Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкрет-

ное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпонировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюн-

ктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

В четвертой главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывается полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В пятой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем (построение тестов для таблиц, синтез самокорректирующихся контактных схем).

Глава 3

Синтез и сложность управляющих систем

§1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть \mathcal{U} — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ , а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса \mathcal{U} , то есть отображение \mathcal{U} во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер (ср.с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно

функционала Ψ в классе \mathcal{U} как минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из \mathcal{U} , которые реализуют F . При этом схема Σ , принадлежащая классу \mathcal{U} , которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе \mathcal{U} относительно функционала Ψ . В силу монотонности функционала Ψ , минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом $L(D, R, \text{ и т. д.})$, будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ F* . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида \mathcal{U}_B^A (вида \mathcal{U}^A) будем обозначать через $\Psi_B^A(F)$ (соответственно $\Psi^A(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi_B^A(n)$ (соответственно $\Psi^A(n)$). В обозначениях классов \mathcal{U}_B^C , \mathcal{U}_B^Φ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс B вида B_0 будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем \mathcal{U}' и \mathcal{U}'' соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют π -схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π -схема Σ_f , которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

Следствие 1. *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π -схемой сложности 2, а также формулой из \mathcal{U}^Φ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Следствие 2. В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

Лемма 1.2. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π -схема Σ_f и формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Доказательство. В качестве Σ_f можно взять π -схему, которая получается из $(1, 2^n)$ -КД порядка n от БП x_1, \dots, x_n (рис. 1.1) в результате снятия тех его выходов, где реализу-

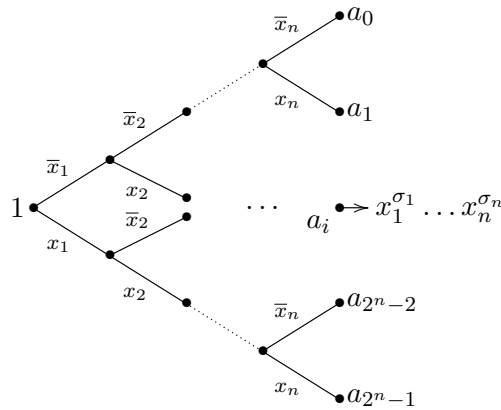


Рис. 1.1: $(1, 2^n)$ -контактное дерево порядка n

ются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ f , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула \mathcal{F}_f получается в результате моделирования построенной π -схемы Σ_f в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где $L^-(\Sigma_f)$ — число размыкающих контактов в схеме Σ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.2)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.3)$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v , а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v , объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v . Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ операции присоединения

вершины v к вершине w . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ Σ' , которая, очевидно, эквивалентна Σ .

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ G , $G \subseteq P_2(n)$, через \vec{G} будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества G , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ будем называть *универсальной системой* порядка n .

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка n , то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$;
2. мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n ;
3. дешифратора \vec{Q}_n (дизъюнктивного дешифратора \vec{J}_n) порядка n ;
4. универсальной системы $\vec{P}_2(n)$ порядка n .

Лемма 1.3. Для каждого натурального n в \mathcal{U}_B^C существует СФЭ U_n , которая реализует систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Доказательство. В силу полноты базиса, в \mathcal{U}_B^C существует система формул Σ от БП x_1, \dots, x_n , которая реализует систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n , включая n ее входов, равно 2^{2^n} и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

§2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

Лемма 2.1. *Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (2.1)$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП $x_i, i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k). \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть Σ_f — минимальная по сложности СФЭ из \mathcal{U}^C , реализующая ФАЛ f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_1, \dots, x_n следует, что $R(\Sigma_f) \geq n$, и поэтому, в силу соотношений (2.6) главы 2,

$$L^C(f) \geq L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ f не является монотонной ФАЛ, то схема Σ_f должна содержать хотя бы один ФЭ \neg и, следовательно, в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Пусть теперь Σ_f — минимальная по сложности $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_i , $i \in [1, n]$, следует, что либо контакт вида x_i , либо контакт вида \bar{x}_i встречается в КС Σ_f , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f , то как контакт вида x_i , так и контакт вида \bar{x}_i входят в Σ_f , и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

Замечание. Нижние оценки сложности ФАЛ $f = s_n^{[0, n-1]}$, вытекающие из леммы 2.1, доказывают минимальность π -схемы, моделирующей $\exists \overline{x_1 \vee \dots \vee x_n} = f$, в классе КС и минимальность формулы $(x_1 \dots x_n) = f$ в классе СФЭ, что устанавливает равенства $L^K(f) = n$ и $L^C(f) = n$.

Лемма 2.2. *Для системы $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (2.3)$$

Доказательство. Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ f_i , $i = 1, \dots, m$, реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь Σ_F — приведенная $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ F . Из приведенности Σ_F и условий леммы вытекает, что Σ_F — связный граф с не менее чем $(m+1)$ вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\vec{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

Замечание. В силу следствия универсальная СФЭ U_n , построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе \mathcal{U}_B^C .

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для некоторых ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

Лемма 2.3. *Для любого натурального n выполняются неравенства:*

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}); \quad (2.4)$$

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2; \quad (2.5)$$

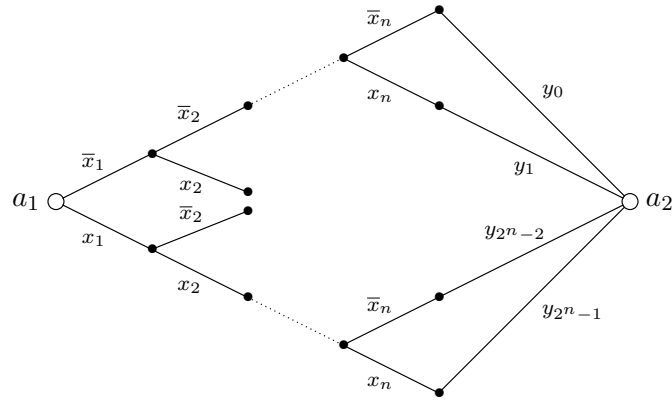
$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (2.6)$$

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (2.7)$$

Доказательство. В классе \mathcal{U}^C построим схемный дешифратор порядка n , удовлетворяющий первому неравенству (2.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП $X(n)$ на группы $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, где $q = \lceil n/2 \rceil$;
2. возьмем дешифраторы Σ' и Σ'' от БП x' и x'' порядка q и $(n - q)$ соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ Σ' и Σ'' , после чего конъюнктируем каждый выход Σ' с каждым выходом Σ'' , а выходы всех использованных для этого 2^n ФЭ $\&$ (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Аналогичным образом строится дизъюнктивный схемный дешифратор порядка n , удовлетворяющий второму неравенству (2.4).

Рис. 2.1: примеры π -схем

Искомым контактным дешифратором порядка n является $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рис. 1.1, а искомым контактным мультиплексором порядка n является π -схема, приведенная на рис. 2.1. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 1.1 и 2.1, равна $2^{n+1} - 2$ и $3 \cdot 2^n - 2$ соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.5) и (2.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно $2^n - 1$.

В результате моделирования указанной π -схемы можно построить неповторную по информационным БП формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\dots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.6), так как

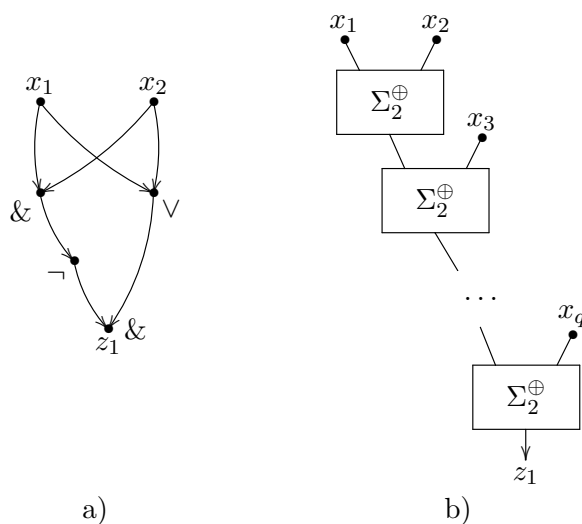


Рис. 2.2: пример суперпозиции СФЭ

реализует ФАЛ μ_n и имеет сложность $4 \cdot 2^n - 3$.

Неравенства (2.7) при $n = 1$, очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ ℓ_n , $n \geq 2$, со сложностью (2.7), является СФЭ Σ_n^\oplus , показанная на рис. 2.2а,б. Аналогичная СФЭ для ФАЛ $\bar{\ell}_n$ получается в результате замены ФЭ $\&$ на ФЭ \vee и ФЭ \vee на ФЭ $\&$ в первой подсхеме вида Σ_2^\oplus схемы Σ_n^\oplus (см. рис. 2.2а).

Лемма доказана. □

Следствие.

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

Лемма 2.4. Если система ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и

1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

Доказательство. Возьмем приведенную $(1, m)$ -КС Σ , реализующую систему ФАЛ F , и заметим, что при любом α , $\alpha \in B^n$, в сети $\Sigma|_\alpha$ имеется связная компонента, которая содержит вход Σ и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе α . Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам α , $\alpha \in B^n$, придем (см. доказательство леммы ??) к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2.$$

Замечание. В силу следствия $(1, 4)$ -КС с входом a , которая состоит из двух непересекающихся по внутренним вершинам $(a - a)$ -цепей (циклов) с ЭК проведимости $\bar{x}_1 x_2 x_1$ и $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1$, является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.

Лемма 2.5. Если для ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, и для любого σ , $\sigma \in B$, ФАЛ $f_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$, то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f_0), L_{\&, \vee}^C(f_1)\} + 2. \quad (2.8)$$

Доказательство. Пусть Σ — минимальная по числу ФЭ $\&$ и \vee СФЭ из класса \mathcal{U}^C , которая реализует ФАЛ f и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ \neg . Из условия леммы следует, что выход ФЭ \neg , присоединённого к входу x_n СФЭ Σ не может быть её выходом.

Пусть цепь C соединяет вход x_n СФЭ Σ с её выходом z_1 и пусть константа σ , $\sigma \in B$, равна 0 тогда и только тогда, когда БП x_n подается в C либо на вход ФЭ $\&$, либо на вход ФЭ \neg , к выходу которого в C присоединён ФЭ \vee .

Рассмотрим СФЭ $\widehat{\Sigma}$, которая реализует ФАЛ f_σ , $f_\sigma \neq 0, 1$, и получена из СФЭ Σ в результате подстановки $x_n = \sigma$, а также последующего ЭП на основе тождеств $\tau^{\text{ПК}}$ (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедимся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа $\&$ или \vee .

Действительно, в случае $\sigma = 0$ из СФЭ Σ будет удален ФЭ \mathcal{E}' , являющийся первым ФЭ типа $\&$ или \vee цепи C . Заметим, что выход ФЭ \mathcal{E}' не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ \neg , выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ f_σ была бы равна константе. Следовательно, на цепи C СФЭ Σ имеется ФЭ \mathcal{E}'' типа $\&$ или \vee , на вход которого поступает либо выход \mathcal{E}' , либо выход ФЭ \neg , присоединённого к выходу \mathcal{E}' . Легко видеть, что ФЭ \mathcal{E}'' тоже будет удален при переходе от Σ к $\widehat{\Sigma}$ и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&, \vee}(f) = L_{\&, \vee}(\Sigma) \geq L_{\&, \vee}(\widehat{\Sigma}) + 2 \geq L_{\&, \vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (2.8).

Случай $\sigma = 1$, когда БП x_n подаётся в C либо на вход ФЭ \vee , либо на вход ФЭ \neg , к выходу которого присоединён ФЭ типа $\&$, рассматривается аналогично.

Лемма доказана. \square

Следствие 1.

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1. \quad (2.9)$$

Действительно, (2.9) получается в результате применения леммы 2.5 последовательно ко всем информационным БП y_{2^n-1}, \dots, y_1 и учитывая, что получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП x_1, \dots, x_n, y_0 .

Следствие 2. Из (2.9) в силу леммы 4.1 главы 2 вытекает неравенство

$$D(\mu_n) \geq n + 1.$$

Замечание. В силу следствия 1 формула $\bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$ является минимальной СФЭ, реализующей ФАЛ μ_1 и $L^C(\mu_1) = 4$.

§3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и π -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [21] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики $F = (f_1, \dots, f_m)$, $F \in P_2^m(n)$, строить $(1, m)$ -КС Σ_F , $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$, и СФЭ U_F , $U_F \in \mathcal{U}^C$, которые реализуют F . Будем считать, что все ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m системы F различны, отличны от констант, и для каждой

БП x_i , $1 \leq i \leq n$, среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от x_i .

Разложим ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m сначала по БП x_1 , потом по БП x_2 и так далее. При этом построим последовательности множеств G_i и \widehat{G}_i , состоящих из ФАЛ от БП x_i, x_{i+1}, \dots, x_n , где $i = 1, 2, \dots, n$, такие, что

1. G_i состоит из всех различных ФАЛ $g(x_i, \dots, x_n)$ вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $1 \leq j \leq m$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$;

2. \widehat{G}_i состоит из всех различных функций g , $g \in G_i$, которые существенно зависят от x_i .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \widehat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$ не пусты и попарно не пересекаются.

Заметим, что любую ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, где $1 \leq i \leq n$, можно представить в виде

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1, \quad (3.1)$$

где $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$, и, следовательно, $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$ для всех σ , $\sigma \in B$. Если при этом для некоторого σ , $\sigma \in B$, ФАЛ $g_{\bar{\sigma}}$ равна 0, то вместо (3.1) будем использовать разложение

$$g = x_i^\sigma g_\sigma, \quad (3.2)$$

где $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$.

Построим КС $\check{\Sigma}_F$, которая реализует систему ФАЛ \vec{G}_F , где $G_F = \widehat{G}_1 \cup \dots \cup \widehat{G}_n$ с помощью операций присоединения одного или двух противоположных контактов. При этом для каждого i , $i = n, (n-1), \dots, 1$, каждая ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, реализуется согласно (3.1) ((3.2)) на выходе v , который при $\alpha =$

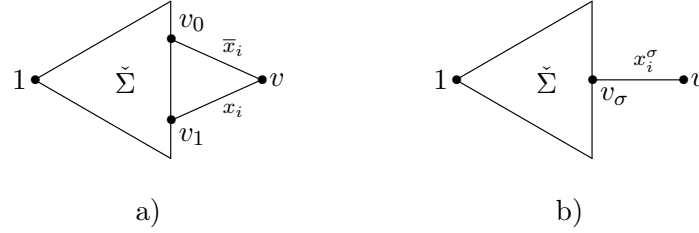


Рис. 3.1: присоединение одного или двух противоположных контактов

$0, 1$ (соответственно $\alpha = \sigma$) соединен контактом вида x_i^α с тем выходом v_α , где реализуется ФАЛ $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$ так, как это показано на рис. 3.1а (соответственно рис. 3.1б).

Заметим, что указанное присоединение одного или двух противоположенных контактов не изменяет ФАЛ, реализуемые в вершинах v_α , $\alpha \in \{0, 1\}$.

Для получения искомой КС Σ_F достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС $\check{\Sigma}_F$, в которых реализуются ФАЛ, отличные от f_1, \dots, f_m .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ \check{U}_F , реализующая систему ФАЛ \vec{G}_F , с той лишь разницей, что:

1. сначала реализуются все ФАЛ вида \bar{x}_i , $1 \leq i \leq n$, которые встречаются в КС Σ_F ;
2. для всех i , $i = (n-1), \dots, 1$, разложение (3.1), где $g \in \hat{G}_i$ и $g_0, g_1 \in \hat{G}_{i+1}$, реализуется так, как показано на рис. 3.2а, а разложение (3.2), применяемое в случае $g_{\bar{\sigma}} = 0$ (разложение

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_\sigma x_i^\sigma = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_\sigma \quad (3.3)$$

в случае $g_{\bar{\sigma}} = 1$), — так, как показано на рис. 3.2б (соответственно 3.2с);

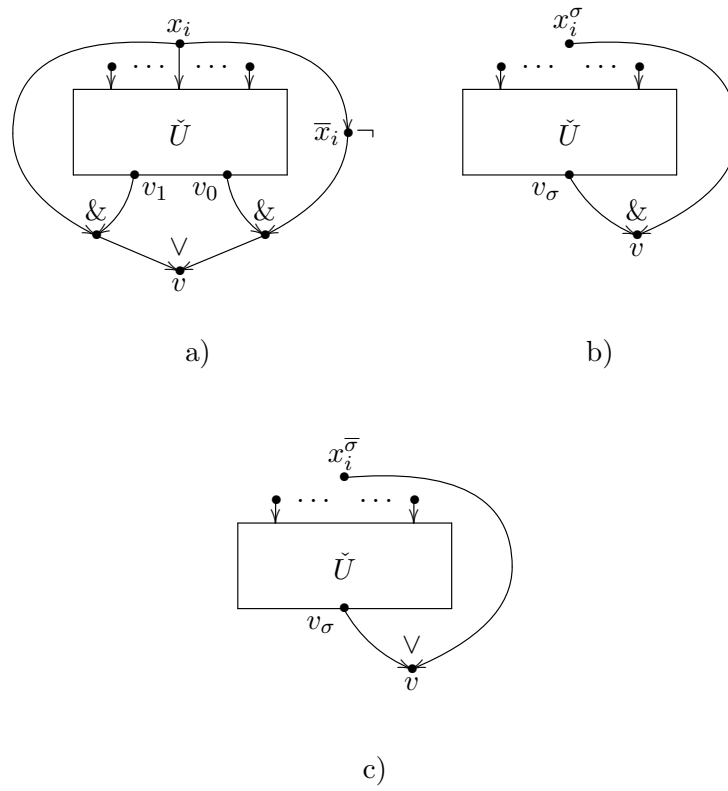


Рис. 3.2: к моделированию операций присоединения контактов в классе СФЭ

3. каждая ФАЛ вида $g_\sigma x_i^\sigma$, используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (3.1) или (3.2) для различных ФАЛ g , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ \check{U}_F в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из F .

Пусть, например, $F = (f_1, f_2)$, где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \hat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \hat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \hat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \hat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \hat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}. \end{aligned}$$

На рис. 3.3 показана построенная для данной системы ФАЛ КС $\check{\Sigma}_F$, вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 3.4 — соответствующая ей КС Σ_F , а на рис. 3.5 — СФЭ U_F .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ l_n , где $n \geq 2$, является известная схема Кардо [32], показанная на рис. 3.6. Заметим, что эта КС имеет сложность $(4n - 4)$ и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для l_n , $n \geq 2$, по методу каскадов имеет сложность $(7n - 9)$ и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой Σ_n^\oplus сложности $(4n - 4)$, показанной на рис. 2.2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ \bar{l}_n (см. лемму 2.3).

При построении по методу каскадов $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики \vec{Q}_n , мы получим

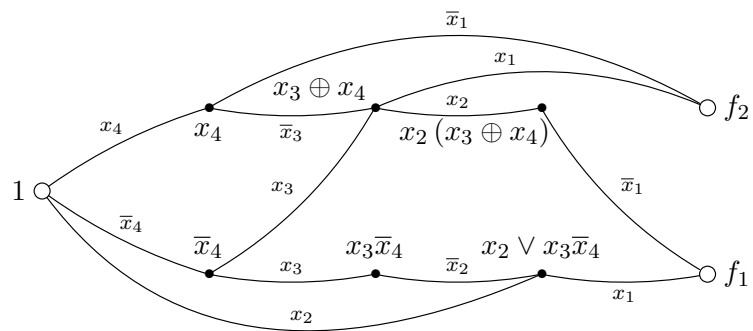


Рис. 3.3: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

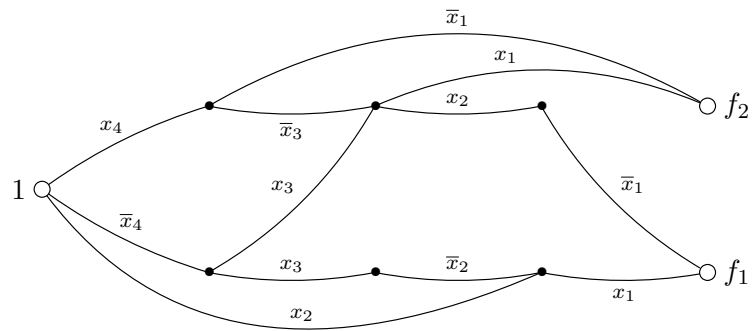


Рис. 3.4: пример КС, построенной методом каскадов

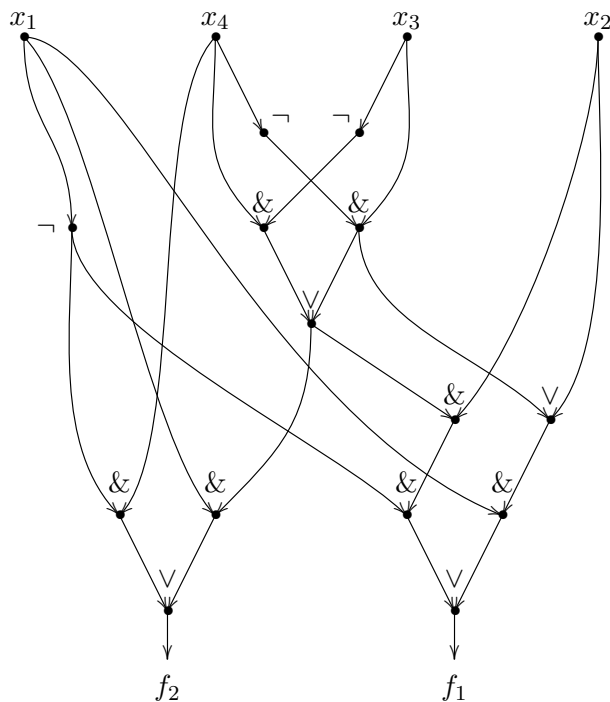


Рис. 3.5: СФЭ для системы ФАЛ F , построенная методом каскадов



Рис. 3.6: схема Кардо для линейной функции l_n

контактное дерево порядка n , показанное на рис. 1.1. Как будет показано далее это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный дизъюнктивный дешифратор порядка n и сложности не больше, чем $2^{n+2} - 6$, контактный универсальный многополюсник порядка n и сложности не больше, чем $2 \cdot 2^{2^n}$, а также контактный мультиплексор порядка n и сложности $3 \cdot 2^n - 2$, показанный на рис. 2.1 (см. лемму 2.3). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ μ_n сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка n , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ μ_n сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка 2^n от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем 2^{2^n+1} . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним леммы 1.3 и 2.3 следующим утверждением.

Лемма 3.1. *Для любого натурального n и $\sigma \in V$ выполняются неравенства:*

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [33, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$.

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра q , $1 \leq q \leq n$, и построении схемы Σ_f , реализующей

произвольную ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ на основе ее разложения по части переменных (см. равенство (2.5) из гл. 1):

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (3.4)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ при всех σ'' , $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ_f представляет собой суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексор порядка $(n - q)$ от адресных БП x'' , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника Σ' порядка q от БП x' в соответствии с (3.4).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ указанным выше способом КС (СФЭ в базисе B_0) Σ_f , где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка $(n - q)$ (соответственно формула \mathcal{F}_{n-q} из леммы 2.3), а Σ' — универсальный многополюсник из леммы 3.1 (соответственно леммы 1.3). Корректность построенной суперпозиции, т.е. реализация схемой Σ_f ФАЛ f в случае СФЭ очевидна, а в случае КС обеспечивается тем, что её можно представить в виде результата многократной операции присоединения двух противоположенных контактов, корректность которой была отмечена выше (см. рис. 3.1). Для сложности полученной схемы Σ_f будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$, и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

- // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.
- [18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.
- [19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [20] *Низматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [26] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

-
- [28] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [29] Яблонский С. В. Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [30] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [31] Яблонский С. В. Эквивалентные преобразования управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [32] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [33] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [34] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.