

Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

# ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

(вариант 2014 г., глава 3)

Москва 2014

## Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Введение</b>  | <b>3</b>  |
| <b>3 Синтез и сложность управляющих систем</b>   | <b>6</b>  |
| §1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций. . . . . | 6         |
| §2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем. . . . .               | 12        |
| §3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов.<br>Метод Шеннона . . . . .           | 20        |
| <b>Литература</b>  | <b>30</b> |

## Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкрет-

ное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпонировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюн-

ктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

В четвертой главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывается полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В пятой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем (построение тестов для таблиц, синтез самокорректирующихся контактных схем).

## Глава 3

### Синтез и сложность управляющих систем

#### §1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ  $F$  можно реализовать некоторой его схемой  $\Sigma$ , а  $\Psi$  — какой-либо функционал сложности схем класса  $\mathcal{U}$ , то есть отображение  $\mathcal{U}$  во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности  $\Psi$  обладает свойством *монотонности*, то есть  $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$ , если  $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$ , и  $\Sigma'$  получается из  $\Sigma$  в результате удаления вершин или ребер (ср.с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность  $\Psi(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно

функционала  $\Psi$  в классе  $\mathcal{U}$  как минимальное значение величины  $\Psi(\Sigma)$  на множестве тех схем  $\Sigma$  из  $\mathcal{U}$ , которые реализуют  $F$ . При этом схема  $\Sigma$ , принадлежащая классу  $\mathcal{U}$ , которая реализует  $F$  и для которой  $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$ , называется *минимальной схемой* в классе  $\mathcal{U}$  относительно функционала  $\Psi$ . В силу монотонности функционала  $\Psi$ , минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину  $\Psi(F)$ , в том случае когда функционал  $\Psi$  совпадает с введенным в главе 2 функционалом  $L(D, R, \text{ и т. д.})$ , будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ  $F$* . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса  $\mathcal{U}$  относительно функционала сложности  $\Psi$* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  для любого из введенных классов вида  $\mathcal{U}_B^A$  (вида  $\mathcal{U}^A$ ) будем обозначать через  $\Psi_B^A(F)$  (соответственно  $\Psi^A(F)$ ), а функцию Шеннона для этого класса относительно  $\Psi$  — через  $\Psi_B^A(n)$  (соответственно  $\Psi^A(n)$ ). В обозначениях классов  $\mathcal{U}_B^C$ ,  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс  $B$  вида  $B_0$  будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей  $\Psi'(F)$  и  $\Psi''(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  в классах схем  $\mathcal{U}'$  и  $\mathcal{U}''$  соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если  $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$ . В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют  $\pi$ -схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности  $L(F)$  системы ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** *Для любой функции алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f \neq 0$ , существуют формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , и  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

**Следствие 1.** *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать  $\pi$ -схемой сложности 2, а также формулой из  $\mathcal{U}^\Phi$ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

**Следствие 2.** В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

**Лемма 1.2.** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$  и  $f \neq 0$ , существуют  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$  и формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , которые реализуют  $f$  и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

*Доказательство.* В качестве  $\Sigma_f$  можно взять  $\pi$ -схему, которая получается из  $(1, 2^n)$ -КД порядка  $n$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  (рис. 1.1) в результате снятия тех его выходов, где реализу-

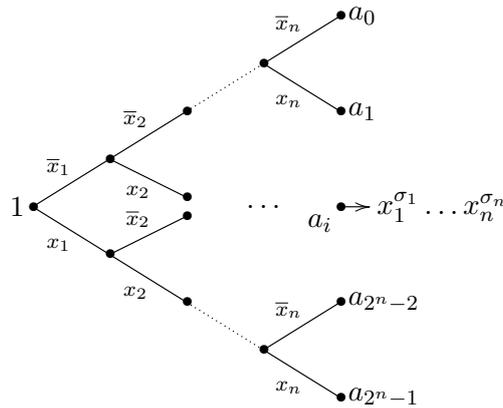


Рис. 1.1:  $(1, 2^n)$ -контактное дерево порядка  $n$

ются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ  $f$ , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула  $\mathcal{F}_f$  получается в результате моделирования построенной  $\pi$ -схемы  $\Sigma_f$  в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где  $L^-(\Sigma_f)$  — число размыкающих контактов в схеме  $\Sigma$ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка  $n$  равно  $2^n - 1$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.2)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.3)$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина  $w$  СФЭ  $\Sigma$  не достижима из ее вершины  $v$ , а СФЭ  $\Sigma'$  получается из СФЭ  $\Sigma$  в результате удаления вершины  $v$ , объявления вершины  $w$  начальной вершиной всех исходивших из  $v$  дуг и переноса в вершину  $w$  всех выходных БП, приписанных вершине  $v$ . Тогда СФЭ  $\Sigma'$  считается результатом применения к СФЭ  $\Sigma$  операции присоединения

вершины  $v$  к вершине  $w$ . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ  $\Sigma$  операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ  $\Sigma'$ , которая, очевидно, эквивалентна  $\Sigma$ .

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ  $G$ ,  $G \subseteq P_2(n)$ , через  $\vec{G}$  будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества  $G$ , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$  будем называть *универсальной системой* порядка  $n$ .

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка  $n$ , то есть ФАЛ  $\ell_n$  или ФАЛ  $\bar{\ell}_n$ ;
2. мультиплексорной ФАЛ  $\mu_n$  порядка  $n$ ;
3. дешифратора  $\vec{Q}_n$  (дизъюнктивного дешифратора  $\vec{J}_n$ ) порядка  $n$ ;
4. универсальной системы  $\vec{P}_2(n)$  порядка  $n$ .

**Лемма 1.3.** Для каждого натурального  $n$  в  $\mathcal{U}_B^C$  существует СФЭ  $U_n$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$  и сложность которой равна  $2^{2^n} - n$ .

*Доказательство.* В силу полноты базиса, в  $\mathcal{U}_B^C$  существует система формул  $\Sigma$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$ . Искомая СФЭ  $U_n$  является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна  $\Sigma$  и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ  $U_n$ , включая  $n$  ее входов, равно  $2^{2^n}$  и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

## §2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

**Лемма 2.1.** *Если ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (2.1)$$

*Если при этом ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ (каждая БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ ), то*

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k). \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ , реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  следует, что  $R(\Sigma_f) \geq n$ , и поэтому, в силу соотношений (2.6) главы 2,

$$L^C(f) \geq L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ, то схема  $\Sigma_f$  должна содержать хотя бы один ФЭ  $\neg$  и, следовательно, в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Пусть теперь  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности  $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_i$ ,  $i \in [1, n]$ , следует, что либо контакт вида  $x_i$ , либо контакт вида  $\bar{x}_i$  встречается в КС  $\Sigma_f$ , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ , то как контакт вида  $x_i$ , так и контакт вида  $\bar{x}_i$  входят в  $\Sigma_f$ , и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

*Замечание.* Нижние оценки сложности ФАЛ  $f = s_n^{[0, n-1]}$ , вытекающие из леммы 2.1, доказывают минимальность  $\pi$ -схемы, моделирующей  $\exists \overline{x_1 \vee \dots \vee x_n} = f$ , в классе КС и минимальность формулы  $(x_1 \dots x_n) = f$  в классе СФЭ, что устанавливает равенства  $L^K(f) = n$  и  $L^C(f) = n$ .

**Лемма 2.2.** *Для системы  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь  $\Sigma_F$  — приведенная  $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ  $F$ . Из приведенности  $\Sigma_F$  и условий леммы вытекает, что  $\Sigma_F$  — связный граф с не менее чем  $(m+1)$  вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\vec{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

*Замечание.* В силу следствия универсальная СФЭ  $U_n$ , построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе  $\mathcal{U}_B^C$ .

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для некоторых ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

**Лемма 2.3.** *Для любого натурального  $n$  выполняются неравенства:*

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}); \quad (2.4)$$

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2; \quad (2.5)$$

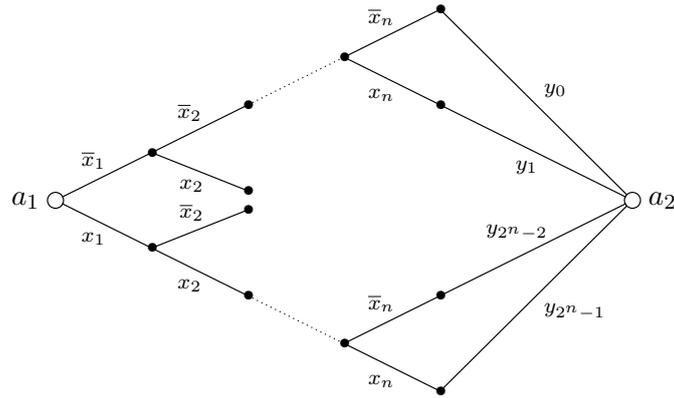
$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (2.6)$$

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (2.7)$$

*Доказательство.* В классе  $\mathcal{U}^C$  построим схемный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий первому неравенству (2.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП  $X(n)$  на группы  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ , где  $q = \lceil n/2 \rceil$ ;
2. возьмем дешифраторы  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  от БП  $x'$  и  $x''$  порядка  $q$  и  $(n - q)$  соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ , после чего конъюнктируем каждый выход  $\Sigma'$  с каждым выходом  $\Sigma''$ , а выходы всех использованных для этого  $2^n$  ФЭ  $\&$  (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Аналогичным образом строится дизъюнктивный схемный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий второму неравенству (2.4).

Рис. 2.1: примеры  $\pi$ -схем

Искомым контактным дешифратором порядка  $n$  является  $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рис. 1.1, а искомым контактным мультиплексором порядка  $n$  является  $\pi$ -схема, приведенная на рис. 2.1. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 1.1 и 2.1, равна  $2^{n+1} - 2$  и  $3 \cdot 2^n - 2$  соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.5) и (2.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно  $2^n - 1$ .

В результате моделирования указанной  $\pi$ -схемы можно построить неповторную по информационным БП формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left( \bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left( \dots \left( \bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.6), так как

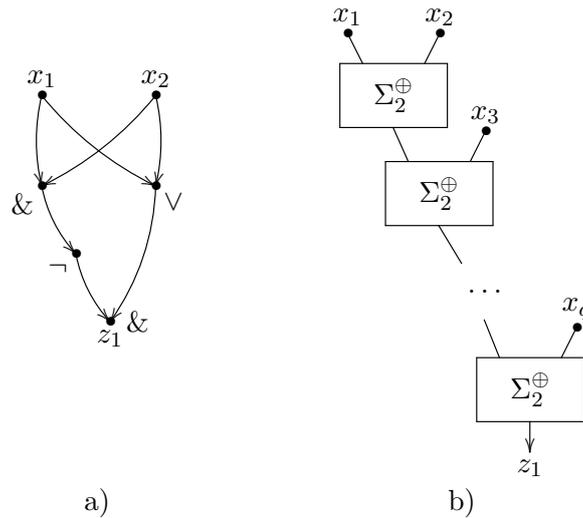


Рис. 2.2: пример суперпозиции СФЭ

реализует ФАЛ  $\mu_n$  и имеет сложность  $4 \cdot 2^n - 3$ .

Неравенства (2.7) при  $n = 1$ , очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$ , со сложностью (2.7), является СФЭ  $\Sigma_n^\oplus$ , показанная на рис. 2.2а,б. Аналогичная СФЭ для ФАЛ  $\bar{\ell}_n$  получается в результате замены ФЭ  $\&$  на ФЭ  $\vee$  и ФЭ  $\vee$  на ФЭ  $\&$  в первой подсхеме вида  $\Sigma_2^\oplus$  схемы  $\Sigma_n^\oplus$  (см. рис. 2.2а).

Лемма доказана. □

**Следствие.**

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

**Лемма 2.4.** Если система ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  состоит из попарно различных ФАЛ от БП  $X(n)$ , отличных от 0 и

1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

*Доказательство.* Возьмем приведенную  $(1, m)$ -КС  $\Sigma$ , реализующую систему ФАЛ  $F$ , и заметим, что при любом  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , в сети  $\Sigma|_\alpha$  имеется связная компонента, которая содержит вход  $\Sigma$  и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе  $\alpha$ . Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , придем (см. доказательство леммы ??) к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2.$$

*Замечание.* В силу следствия  $(1, 4)$ -КС с входом  $a$ , которая состоит из двух непересекающихся по внутренним вершинам  $(a - a)$ -цепей (циклов) с ЭК проведимости  $\bar{x}_1 x_2 x_1$  и  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1$ , является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.

**Лемма 2.5.** Если для ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , и для любого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $f_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$ , то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f_0), L_{\&, \vee}^C(f_1)\} + 2. \quad (2.8)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma$  — минимальная по числу ФЭ  $\&$  и  $\vee$  СФЭ из класса  $\mathcal{U}^C$ , которая реализует ФАЛ  $f$  и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ  $\neg$ . Из условия леммы следует, что выход ФЭ  $\neg$ , присоединённого к входу  $x_n$  СФЭ  $\Sigma$  не может быть её выходом.

Пусть цепь  $C$  соединяет вход  $x_n$  СФЭ  $\Sigma$  с её выходом  $z_1$  и пусть константа  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , равна 0 тогда и только тогда, когда БП  $x_n$  подается в  $C$  либо на вход ФЭ  $\&$ , либо на вход ФЭ  $\neg$ , к выходу которого в  $C$  присоединён ФЭ  $\vee$ .

Рассмотрим СФЭ  $\widehat{\Sigma}$ , которая реализует ФАЛ  $f_\sigma$ ,  $f_\sigma \neq 0, 1$ , и получена из СФЭ  $\Sigma$  в результате подстановки  $x_n = \sigma$ , а также последующего ЭП на основе тождеств  $\tau^{\text{ПК}}$  (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедимся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа  $\&$  или  $\vee$ .

Действительно, в случае  $\sigma = 0$  из СФЭ  $\Sigma$  будет удален ФЭ  $\mathcal{E}'$ , являющийся первым ФЭ типа  $\&$  или  $\vee$  цепи  $C$ . Заметим, что выход ФЭ  $\mathcal{E}'$  не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ  $\neg$ , выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ  $f_\sigma$  была бы равна константе. Следовательно, на цепи  $C$  СФЭ  $\Sigma$  имеется ФЭ  $\mathcal{E}''$  типа  $\&$  или  $\vee$ , на вход которого поступает либо выход  $\mathcal{E}'$ , либо выход ФЭ  $\neg$ , присоединённого к выходу  $\mathcal{E}'$ . Легко видеть, что ФЭ  $\mathcal{E}''$  тоже будет удален при переходе от  $\Sigma$  к  $\widehat{\Sigma}$  и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&, \vee}(f) = L_{\&, \vee}(\Sigma) \geq L_{\&, \vee}(\widehat{\Sigma}) + 2 \geq L_{\&, \vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (2.8).

Случай  $\sigma = 1$ , когда БП  $x_n$  подаётся в  $C$  либо на вход ФЭ  $\vee$ , либо на вход ФЭ  $\neg$ , к выходу которого присоединён ФЭ типа  $\&$ , рассматривается аналогично.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.**

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1. \quad (2.9)$$

Действительно, (2.9) получается в результате применения леммы 2.5 последовательно ко всем информационным БП  $y_{2^n-1}, \dots, y_1$  и учитывая, что получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП  $x_1, \dots, x_n, y_0$ .

**Следствие 2.** Из (2.9) в силу леммы 4.1 главы 2 вытекает неравенство

$$D(\mu_n) \geq n + 1.$$

*Замечание.* В силу следствия 1 формула  $\bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$  является минимальной СФЭ, реализующей ФАЛ  $\mu_1$  и  $L^C(\mu_1) = 4$ .

### §3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и  $\pi$ -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [21] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики  $F = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $F \in P_2^m(n)$ , строить  $(1, m)$ -КС  $\Sigma_F$ ,  $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$ , и СФЭ  $U_F$ ,  $U_F \in \mathcal{U}^C$ , которые реализуют  $F$ . Будем считать, что все ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  системы  $F$  различны, отличны от констант, и для каждой

БП  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от  $x_i$ .

Разложим ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  сначала по БП  $x_1$ , потом по БП  $x_2$  и так далее. При этом построим последовательности множеств  $G_i$  и  $\widehat{G}_i$ , состоящих из ФАЛ от БП  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , такие, что

1.  $G_i$  состоит из всех различных ФАЛ  $g(x_i, \dots, x_n)$  вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где  $1 \leq j \leq m$ ,  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$ ;

2.  $\widehat{G}_i$  состоит из всех различных функций  $g$ ,  $g \in G_i$ , которые существенно зависят от  $x_i$ .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \widehat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ  $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$  не пусты и попарно не пересекаются.

Заметим, что любую ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , где  $1 \leq i \leq n$ , можно представить в виде

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1, \quad (3.1)$$

где  $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , и, следовательно,  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$  для всех  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ . Если при этом для некоторого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $g_{\bar{\sigma}}$  равна 0, то вместо (3.1) будем использовать разложение

$$g = x_i^\sigma g_\sigma, \quad (3.2)$$

где  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$ .

Построим КС  $\check{\Sigma}_F$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , где  $G_F = \widehat{G}_1 \cup \dots \cup \widehat{G}_n$  с помощью операций присоединения одного или двух противоположных контактов. При этом для каждого  $i$ ,  $i = n, (n-1), \dots, 1$ , каждая ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , реализуется согласно (3.1) ((3.2)) на выходе  $v$ , который при  $\alpha =$

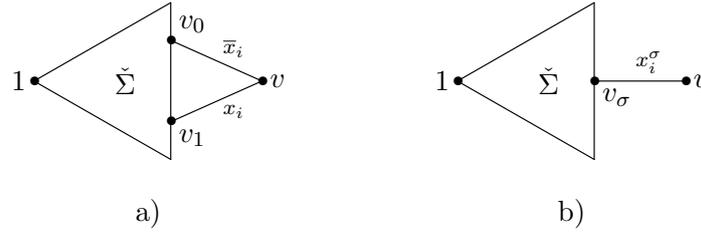


Рис. 3.1: присоединение одного или двух противоположных контактов

$0, 1$  (соответственно  $\alpha = \sigma$ ) соединен контактом вида  $x_i^\alpha$  с тем выходом  $v_\alpha$ , где реализуется ФАЛ  $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$  так, как это показано на рис. 3.1а (соответственно рис. 3.1б).

Заметим, что указанное присоединение одного или двух противоположенных контактов не изменяет ФАЛ, реализуемые в вершинах  $v_\alpha$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$ .

Для получения искомой КС  $\Sigma_F$  достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС  $\check{\Sigma}_F$ , в которых реализуются ФАЛ, отличные от  $f_1, \dots, f_m$ .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ  $\check{U}_F$ , реализующая систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , с той лишь разницей, что:

1. сначала реализуются все ФАЛ вида  $\bar{x}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , которые встречаются в КС  $\Sigma_F$ ;
2. для всех  $i$ ,  $i = (n-1), \dots, 1$ , разложение (3.1), где  $g \in \hat{G}_i$  и  $g_0, g_1 \in \hat{G}_{i+1}$ , реализуется так, как показано на рис. 3.2а, а разложение (3.2), применяемое в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 0$  (разложение

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_\sigma x_i^\sigma = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_\sigma \quad (3.3)$$

в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 1$ ), — так, как показано на рис. 3.2б (соответственно 3.2с);

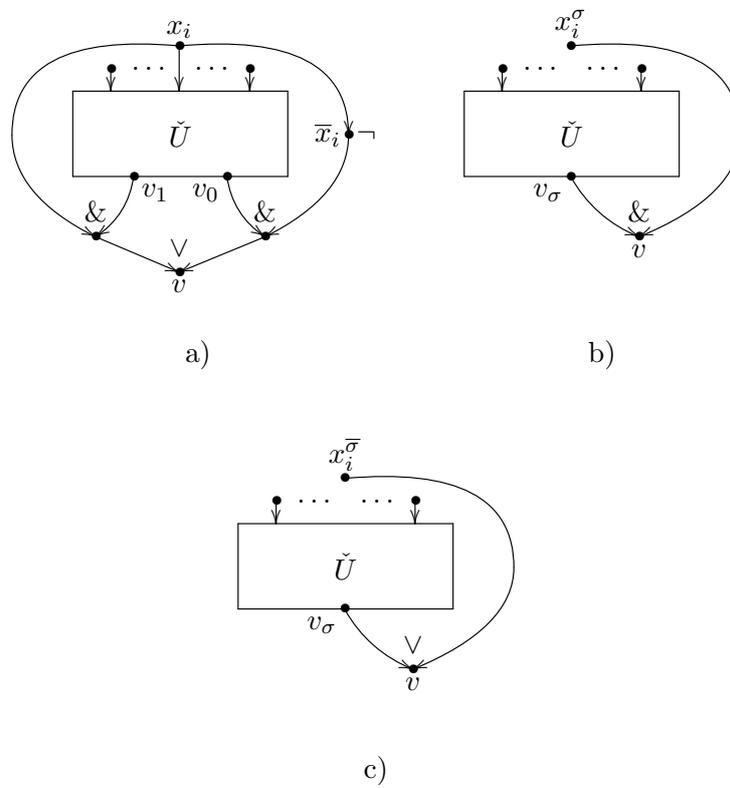


Рис. 3.2: к моделированию операций присоединения контактов в классе СФЭ

3. каждая ФАЛ вида  $g_\sigma x_i^\sigma$ , используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (3.1) или (3.2) для различных ФАЛ  $g$ , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ  $U_F$ , реализующая систему ФАЛ  $F$  и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ  $\check{U}_F$  в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из  $F$ .

Пусть, например,  $F = (f_1, f_2)$ , где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \hat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \hat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \hat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \hat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \hat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}. \end{aligned}$$

На рис. 3.3 показана построенная для данной системы ФАЛ КС  $\check{\Sigma}_F$ , вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 3.4 — соответствующая ей КС  $\Sigma_F$ , а на рис. 3.5 — СФЭ  $U_F$ .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ  $l_n$ , где  $n \geq 2$ , является известная схема Кардо [32], показанная на рис. 3.6. Заметим, что эта КС имеет сложность  $(4n - 4)$  и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для  $l_n$ ,  $n \geq 2$ , по методу каскадов имеет сложность  $(7n - 9)$  и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой  $\Sigma_n^\oplus$  сложности  $(4n - 4)$ , показанной на рис. 2.2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ  $\bar{l}_n$  (см. лемму 2.3).

При построении по методу каскадов  $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики  $\vec{Q}_n$ , мы получим

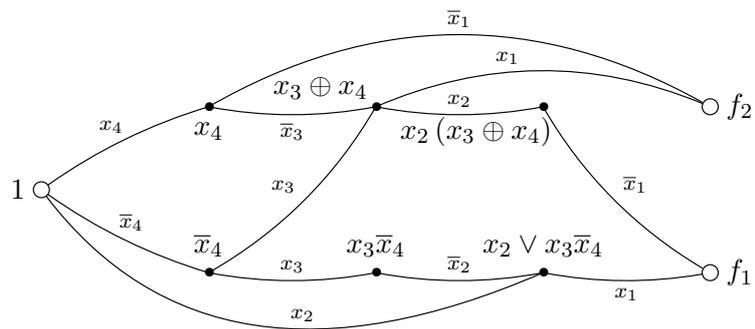


Рис. 3.3: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

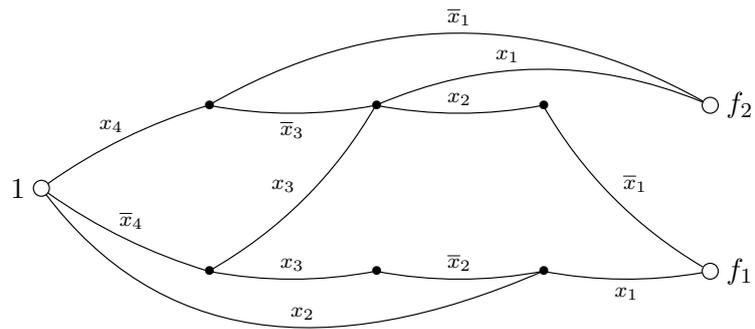


Рис. 3.4: пример КС, построенной методом каскадов

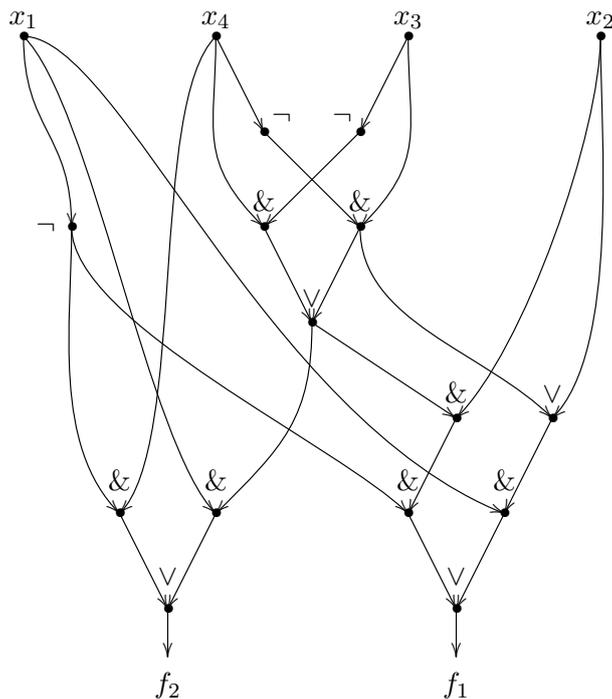


Рис. 3.5: СФЭ для системы ФАЛ  $F$ , построенная методом каскадов

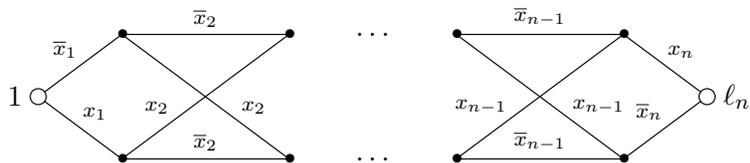


Рис. 3.6: схема Кардо для линейной функции  $l_n$

контактное дерево порядка  $n$ , показанное на рис. 1.1. Как будет показано далее это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный дизъюнктивный дешифратор порядка  $n$  и сложности не больше, чем  $2^{n+2} - 6$ , контактный универсальный многополюсник порядка  $n$  и сложности не больше, чем  $2 \cdot 2^{2^n}$ , а также контактный мультиплексор порядка  $n$  и сложности  $3 \cdot 2^n - 2$ , показанный на рис. 2.1 (см. лемму 2.3). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка  $n$ , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка  $2^n$  от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем  $2^{2^n+1}$ . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним леммы 1.3 и 2.3 следующим утверждением.

**Лемма 3.1.** *Для любого натурального  $n$  и  $\sigma \in V$  выполняются неравенства:*

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [33, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$ .

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра  $q$ ,  $1 \leq q \leq n$ , и построении схемы  $\Sigma_f$ , реализующей

произвольную ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  на основе ее разложения по части переменных (см. равенство (2.5) из гл. 1):

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (3.4)$$

где  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$  при всех  $\sigma''$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ . При этом схема  $\Sigma_f$  представляет собой суперпозицию вида  $\Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  — мультиплексор порядка  $(n - q)$  от адресных БП  $x''$ , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника  $\Sigma'$  порядка  $q$  от БП  $x'$  в соответствии с (3.4).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  указанным выше способом КС (СФЭ в базисе  $B_0$ )  $\Sigma_f$ , где  $\Sigma''$  —  $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка  $(n - q)$  (соответственно формула  $\mathcal{F}_{n-q}$  из леммы 2.3), а  $\Sigma'$  — универсальный многополюсник из леммы 3.1 (соответственно леммы 1.3). Корректность построенной суперпозиции, т.е. реализация схемой  $\Sigma_f$  ФАЛ  $f$  в случае СФЭ очевидна, а в случае КС обеспечивается тем, что её можно представить в виде результата многократной операции присоединения двух противоположенных контактов, корректность которой была отмечена выше (см. рис. 3.1). Для сложности полученной схемы  $\Sigma_f$  будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$ , и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** *Для функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$  выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

## Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

- // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.
- [18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.
- [19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [20] *Низматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [26] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

- 
- [28] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [29] Яблонский С. В. Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [30] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [31] Яблонский С. В. Эквивалентные преобразования управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [32] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [33] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [34] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.