Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 30

Вычислительные возможности
метода резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Пусть

- S **— система дизъюнктов-правил,**
- Q_1 **— дизъюнкт-запрос,**
- $Q_1, D_1, Q_2, D_2, \ldots, Q_k, D_k, \Box$, $k \geq 0$, **— успешный входной резолютивный вывод из** $S \cup \{Q_1\}$**,**
- $\theta_1, \ldots, \theta_k$ **— наиболее общие унификаторы, согласно которым в выводе строятся резольвенты** $Q_2, \ldots, Q_k, \Box$ **соответственно, и**
- $\mathrm{Var}_{Q_1\theta_1\ldots\theta_k} = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n\}$**.**

Тогда $S \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}} \, ((\neg Q_1)\theta_1 \ldots \theta_k)$

Доказательство (индукцией по параметру k).

База: $k = 0$

Тогда $Q_1 = \Box$, $\mathrm{Var}_{Q_1} = \emptyset$ и $S \not\models \Box$, а значит, $S \models \neg Q_1$

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Доказательство (индуктивный переход).

Пусть утверждение справедливо для $k < N$ для заданного N, $N \geq 1$; покажем, что оно справедливо и для $k = N$

Далее $\forall \ldots\ \varphi$ означает $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi$, где $\mathrm{Var}_\varphi = \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n\}$

Пусть $Q_2 = (\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_p)\theta_1$, $Q_1 = \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_q \vee \neg B$, $D_1 = \neg A_{q+1} \vee \cdots \vee \neg A_p \vee C$, $B\theta_1 = C\theta_1$ и $\eta = \theta_2 \ldots \theta_k$

По индуктивному предположению, верно $S \models \forall \ldots\ ((\neg Q_2)\eta)$

Значит, верно $S \models \forall \ldots\ ((A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_q)\theta_1\eta)$ и
$S \models \forall \ldots\ ((A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p)\theta_1\eta)$ (почему?)

При этом $S \models \forall \ldots\ (A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \to C)$, (почему?)
а значит, и $S \models \forall \ldots\ ((A_{q+1} \,\&\, \ldots \,\&\, A_p \to C)\theta_1\eta)$ (почему?)

Тогда, $S \models \forall \ldots\ (C\theta_1\eta)$ (почему?)

При этом $C\theta_1 = B\theta_1$, а значит, $S \models \forall \ldots\ (B\theta_1\eta)$

Следовательно, $S \models \forall \ldots\ ((\neg Q_1)\theta_1\eta)$ ▼

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: Даша, Саша, Паша и пиво

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}), \\ \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}), \end{array} \right\} \qquad Q_1 = \neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д})$$

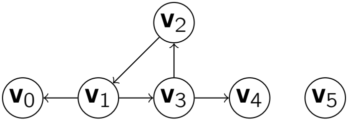
$$\begin{array}{cl}
\neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) & \\
\downarrow & \theta_1 = \{\mathrm{z}/\textbf{П}, \mathrm{x}'/\textbf{Д}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\
\neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y}) & \\
\downarrow & \theta_2 = \{\mathrm{y}/\textbf{С}\} \\
\neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С}) & \\
\downarrow & \theta_3 = \{\mathrm{x}'/\textbf{С}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\} \\
\neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}) & \\
\downarrow & \theta_4 = \{\mathrm{y}/\textbf{п}\} \\
\neg\mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) & \\
\downarrow & \theta_5 = \varepsilon \\
\square &
\end{array}$$

По только что доказанной теореме, верно $S \models \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д})\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5$

То есть $S \models \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{Д})$: Паша действительно любит Дашу

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



Достижима ли вершина $\mathbf{v}_4$ из $\mathbf{v}_1$, и если да, то по какому пути?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов и решить при помощи входной резолюции

Вершины графа $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots)$ — это константы

Ещё так получится, что вершинами графа можно считать все термы, но в рассматриваемом примере это неважно

Тот факт, что (u, w) — дуга графа, будет записываться в виде атома $\mathrm{Arc}(u, w)$

Тогда в нашем распоряжении есть пять фактов, отвечающих пяти дугам:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \end{array}$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

Путь $u_1 \to u_2 \to \dots \to u_k$ будет записываться так (*чтобы не различать дугу и импликацию*):

$$u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_k$$

$\circ$ — это функциональный символ местности 2

Символ $\circ$ ассоциативен вправо: $x \circ y \circ z = x \circ (y \circ z)$

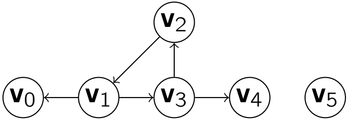
Тот факт, что вершина w достижима из u по пути π, будем записываться в виде атома $\mathrm{Reach}(u, w, \pi)$

Тогда для такого трёхместного отношения достижимости справедливы следующие свойства (*индуктивное определение*):

- Любая вершина достижима из себя по тривиальному пути
$$\forall \mathrm{x}\ \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x})$$
- Если в графе есть дуга $\mathrm{x} \to \mathrm{y}$ и из y по пути π достижима вершина z, то из x по пути $\mathrm{x} \to \pi$ достижима вершина z
$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, \forall \mathrm{p}\, (\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \&\, \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \circ \mathrm{p}))$$
Равносильный дизъюнкт:
$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, \forall \mathrm{p}\, (\neg \mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \vee \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \circ \mathrm{p}))$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



$\mathbf{v}_1 \rightsquigarrow \mathbf{v}_4$?

Входные данные задачи можно записать в виде системы дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \multicolumn{3}{l}{\neg\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \vee \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \circ \mathrm{p})} \end{array} \right\}$$

Вопрос к задаче можно записать в виде формулы $\exists \mathrm{p}\ \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})$

Отрицание этой формулы — это дизъюнкт-запрос

$$\varphi = \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})$$

Чтобы убедиться, что вершина $\mathbf{v}_4$ достижима из $\mathbf{v}_1$, и найти соответствующий путь, достаточно построить успешный входной вывод $\square$ из $S \cup \{\varphi\}$, инициированный φ, и применить недавно доказанную теорему

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \multicolumn{3}{l}{\neg\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) \vee \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \circ \mathrm{p})} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) & \\
\theta_1 = \{\mathrm{x}/\mathbf{v}_1, \mathrm{z}/\mathbf{v}_4, \mathrm{p}/\mathbf{v}_1 \circ \mathrm{p}'\} & \downarrow & \neg\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}') \vee \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \circ \mathrm{p}') \\
 & \neg\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}') \longleftarrow & \\
\theta_2 = \{\mathrm{y}/\mathbf{v}_3, \mathrm{p}'/\mathrm{p}\} & \downarrow & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \\
 & \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) \longleftarrow & \\
\theta_3 = \{\mathrm{x}/\mathbf{v}_3, \mathrm{z}/\mathbf{v}_4, \mathrm{p}/\mathbf{v}_3 \circ \mathrm{p}'\} & \downarrow & \neg\mathrm{Arc}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}') \vee \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{z}, \mathrm{x} \circ \mathrm{p}') \\
 & \neg\mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{Reach}(\mathrm{y}, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}') \longleftarrow & \\
\theta_4 = \{\mathrm{y}/\mathbf{v}_4, \mathrm{p}'/\mathrm{p}\} & \downarrow & \mathrm{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \\
 & \neg\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, \mathrm{p}) \longleftarrow & \\
\theta_5 = \{\mathrm{p}/\mathbf{v}_4, \mathrm{x}/\mathbf{v}_4\} & \downarrow & \mathrm{Reach}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \\
 & \square \longleftarrow &
\end{array}$$

$$\mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathrm{p})\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \mathrm{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_3 \circ \mathbf{v}_4)$$

Следовательно, вершина $\mathbf{v}_4$ достижима из $\mathbf{v}_1$ по пути $\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_3 \to \mathbf{v}_4$