Математическая логика и логическое программирование

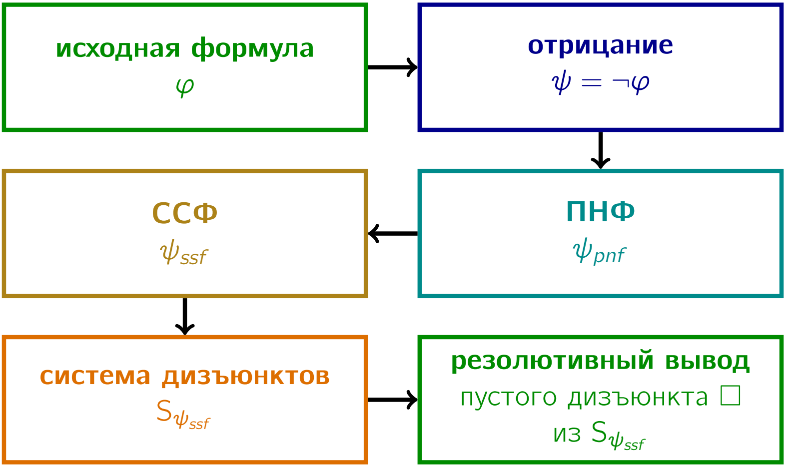
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 23

Обоснование общезначимости формулы методом резолюций (пример)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр



$$\models \varphi \quad\Leftrightarrow\quad \not\models \psi \quad\Leftrightarrow\quad \not\models \psi_{pnf} \quad\Leftrightarrow\quad \not\models \psi_{ssf} \quad\Leftrightarrow\quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$$\Leftarrow \quad \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Примеры, которые использовались при обсуждении этапов метода резолюций, выбирались так, чтобы при их совмещении получился сквозной пример: обоснование общезначимости формулы

$$\exists x\, (P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

методом резолюций

Запишем получившееся обоснование от начала и до конца

Этап 1: поставить отрицание

$$\models \exists x\, (P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\, (P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\not\models \neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$

Этап 2: построить равносильную ПНФ

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$
$$\sim \text{(\textit{переименование переменных})}$$
$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists u\,R(x,u))$$
$$\sim \text{(\textit{удаление импликаций})}$$
$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z)\vee\exists y\,R(x,y)))\vee\exists u\,R(x,u))$$
$$\sim \text{(\textit{продвижение отрицаний})}$$
$$\forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$
$$\sim \text{(\textit{вынесение кванторов})}$$
$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z)\vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$
$$\sim \text{(\textit{получение КНФ})}$$
$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z)\vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\models \exists x\, (P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 3: построить ССФ, применив алгоритм сколемизации

$$\not\models \forall x\, \underline{\exists z}\, \underline{\exists y}\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\underline{z}) \vee R(x,\underline{y}))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 4: перейти к системе дизъюнктов

$$\not\models \forall x\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x),\, \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)),\, \neg R(x,u)\}$$

$$\models \exists x\, (P(x) \,\&\, (\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x, y)) \to \exists y\, R(x, y))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\not\models \{P(x), \quad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \quad \neg R(x, u)\}$$

Этап 5: резолютивно вывести $\Box$

$$P(x_1) \qquad \neg P(\mathbf{f}(x_2)) \vee R(x_2, \mathbf{g}(x_2)) \qquad R(x_3, \mathbf{g}(x_3)) \qquad \neg R(x_4, u_4) \longrightarrow \Box$$

Оказалось, что $\Box$ резолютивно выводи́м
из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по спектру доказанных ранее теорем), исходная формула
$$\exists x\, (P(x) \,\&\, (\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x, y)) \to \exists y\, R(x, y))$$
общезначима