Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 21

Диаграммы событий
Причинно-следственный порядок событий

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Напоминание

Для описания устройства узлов р.а. удобно использовать псевдокод:

Узел A с переменной $m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ с начальным значением $\mathbb{f}$:

do $\{$
  1: $m := \neg m$;
  2: $\mathrm{send}_B(m)$;
$\}$ **until** $\mathbb{f}$

Узел B с переменной $m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$:

do $\{$
  1: $\mathrm{receive}_A(m)$;
$\}$ **until** $\mathbb{f}$

Переменными узлов, типами переменных и спектром сообщений задаются конфигурации с.п. р.а.:

$$(\{1, 2\} \times \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}) \times (\{1\} \times \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}) \times \mathbb{M}(\{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$$

Конфигурации изменяются действиями узлов (по-другому — событиями в с.п.), представляющимися в т.ч. группами команд псевдокода:

$$\text{«}1 : m := \neg m;\text{»} \quad \leftrightarrow \quad (\langle 1, m/\tfrac{\mathbb{t}}{\mathbb{f}} \rangle, \ldots) \to (\langle 2, m/\tfrac{\mathbb{f}}{\mathbb{t}} \rangle, \ldots)$$

Напоминание

Для описания устройства узлов р.а. удобно использовать псевдокод:

Узел A с переменной $m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ с начальным значением $\mathbb{f}$:

do {
  1: $m := \neg m$;
  2: $\mathrm{send}_B(m)$;
} **until** $\mathbb{f}$

Узел B с переменной $m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$:

do {
  1: $\mathrm{receive}_A(m)$;
} **until** $\mathbb{f}$

Вычисление с.п. — это непродолжаемая последовательность конфигураций, в которой каждая следующая получается из предыдущей согласно действиям узлов:

$$(\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{m := \neg m;,1} (\langle 2, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\mathrm{send}_B(m);,1}$$
$$(\langle 1, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \{\mathbb{t}\}) \xrightarrow{\mathrm{receive}_A(m);,2} (\langle 1, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{m := \neg m;,1}$$
$$(\langle 2, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\mathrm{send}_B(m);,1} (\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \{\mathbb{f}\}) \xrightarrow{\mathrm{receive}_A(m);,2}$$
$$(\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{m := \neg m;,1} \dots$$

Диаграммы событий

$\mathbb{N}$ — так будем обозначать множество всех натуральных чисел:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Для последовательности $\mathfrak{S}$ записью

- $|\mathfrak{S}|$ обозначим длину последовательности $\mathfrak{S}$ (количество её элементов)
- $\mathfrak{Ind}_{\mathfrak{S}}$ обозначим множество номеров элементов $\mathfrak{S}$:
  - Если $|\mathfrak{S}| = n < \infty$, то $\mathfrak{Ind}_{\mathfrak{S}} = \{1, 2, \dots, n\}$
  - Если $|\mathfrak{S}| = \infty$, то $\mathfrak{Ind}_{\mathfrak{S}} = \mathbb{N}$
- $\mathfrak{S}(i)$ обозначим элемент x_i, где $\mathfrak{S} = (x_1, x_2, \dots)$

Диаграммы событий

Вычислению $\pi = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ с.п. р.с. $\mathcal{S} = (p_1, \dots, p_n)$ сопоставим следующую последовательность действий $\mathfrak{Act}(\pi, \mathcal{S}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, такую что:

- Длина $\mathfrak{Act}(\pi, S)$ меньше длины π на 1 (бесконечна, если вычисление π бесконечно)
- $\gamma_{i+1} = \alpha_i(\gamma_i)$ для всех $i \in \mathfrak{Ind}_{\mathfrak{Act}(\pi,\mathfrak{A})}$

Записью $\alpha^{(n)}$ будем обозначать действие α рассматриваемого вычисления, выполнившееся в нём в n-й раз

Например, для с.п. р.с. $\mathcal{S}$ и её вычисления

$$\pi = (\ \gamma_1 \xrightarrow{\alpha_1,1} \gamma_2 \xrightarrow{\alpha_2,1} \gamma_3 \xrightarrow{\beta,2} \gamma_4 \xrightarrow{\alpha_1,1} \gamma_5 \xrightarrow{\alpha_2,1} \gamma_6 \xrightarrow{\beta,2} \gamma_7 \xrightarrow{\alpha_1,1} \dots)$$

верно

$$\mathfrak{Act}(\pi, \mathcal{S}) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \alpha_1, \dots) = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \beta^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \beta^{(2)}, \alpha_1^{(3)}, \dots)$$

По умолчанию будем считать все действия в вычислении попарно различными — для ясности, $\alpha^{(i)} = (\alpha, i) \neq (\alpha, j) = \alpha^{(j)}$, если $i \neq j$

Диаграммы событий

В рассматривавшихся примерах можно было заметить несколько закономерностей, относящихся к обсуждению вычислений с.п.:

- Иногда важно указывать не только и не столько сами конфигурации, сколько действия, выполнение которых приводит к этим конфигурациям
- Изображение внутренних действий и точная группировка команд псевдокода по действиям иногда существенно менее важны, чем точное изображение порядка взаимодействия узлов

Чтобы подчеркнуть эти особенности, вычисления с.п. р.с. зачастую изображаются так, чтобы в них

- прежде всего было наглядно видно взаимодействие узлов,
- после этого — последовательность выполняемых действий, и
- исходя из действий — последовательность конфигураций

Диаграммы событий

Для такой иллюстрации вычисления π с.п. р.с. $\mathcal{S}$ будем использовать будем использовать диаграммы событий (или, по-другому, диаграммы действий), устроенные так:

- Каждому узлу отвечает горизонтальная линия, и вычислению в целом — горизонтальная линия под линиями узлов
- На линии вычисления π отмечаются точками слева направо действия из $\mathfrak{Act}(\pi, \mathfrak{A})$, и действие узла отмечается точкой на линии этого узла в той же вертикали
- Действия отправки и соответствующего приёма сообщения объявляются взаимосвязанными в вычислении и соединяются стрелкой от отправки к приёму
  - Если в коммуникационной подсистеме содержится несколько идентичных сообщений, то по умолчанию будем считать, что принимается сообщение, отправленное первым

Диаграммы событий

Пример

Узел A $(m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\} = \mathbb{f}$:

do $\{$

1: $m := \neg m$;

2: $\mathrm{send}_B(m)$;

$\}$ **until** $\mathbb{f}$

Узел B $(m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$:

var $m : \mathit{bool} = *$;

do $\{$

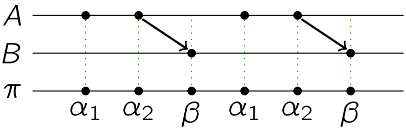
1: $\mathrm{receive}_A(m)$;

$\}$ **until** $\mathbb{f}$

Началу вычисления π

$$(\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{m:=\neg m;,1} (\langle 2, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\mathrm{send}_B(m);,1} (\langle 1, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \{\mathbb{t}\}) \xrightarrow{\mathrm{receive}_A(m);,2}$$
$$(\langle 1, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{m:=\neg m;,1} (\langle 2, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\mathrm{send}_B(m);,1} (\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \{\mathbb{f}\}) \xrightarrow{\mathrm{receive}_A(m);,2}$$
$$(\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{m:=\neg m;,1} \ldots$$

с.п. р.с. (A, B) отвечает диаграмма событий



с действиями $\alpha_1 = (1 : m{:=}\neg m)$, $\alpha_2 = (2 : \mathrm{send}_B(m))$ узла A
и $\beta = (1 : \mathrm{receive}_A(m))$ узла B

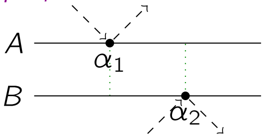
Теорема (о перестановке соседних действий). **Пусть**

- γ — **конфигурация с.п. р.с. с асинхронным обменом сообщениями,**
- **у каждого сообщения в вычислениях с.п. р.с. есть ровно один адресат и**
- α_1 **и** α_2 — **действия различных узлов этого алгоритма, допустимые в** γ**.**

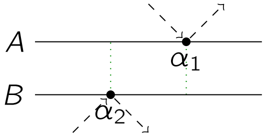
Тогда действие α_1 **допустимо в** $\alpha_2(\gamma)$**, действие** α_2 **допустимо в** $\alpha_1(\gamma)$**, и верно равенство** $\alpha_1(\alpha_2(\gamma)) = \alpha_2(\alpha_1(\gamma))$

Д.з. 1: доказать эту теорему (достаточно перебрать все пары видов действий и применить подходящие определения)

Иллюстрация:



$\Leftrightarrow$



Причинно-следственный порядок событий

Отношение строгого причинно-следственного порядка $\prec$ на элементах последовательности действий $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ р.с. зададим как наименьшее (по теоретико-множественному включению) отношение, обладающее следующими свойствами:

- Если α_i и α_j — действия одного узла р.с. и $i < j$, то $\alpha_i \prec \alpha_j$
- Если α_i и α_j — взаимосвязанные действия отправки и приёма соответственно, то $\alpha_i \prec \alpha_j$
- Если $\alpha_i \prec \alpha_j \prec \alpha_k$, то $\alpha_i \prec \alpha_k$ (свойство транзитивности)

Если верно $\alpha \prec \beta$, то α будем называть (строгой) причиной β, а β — (строгим) следствием α

Причинно-следственный порядок событий

Соответствующее отношение $\preceq$ нестрогого порядка зададим так:
$\alpha_i \preceq \alpha_j \Leftrightarrow \alpha_i \prec \alpha_j$ или $i = j$

Если верно $\alpha \preceq \beta$, то α будем называть нестрогой причиной β, а β — нестрогим следствием α

Действия α и β будем называть несравнимыми, а также параллельными ($\alpha \| \beta$), если не выполняется ни одно из соотношений $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$

Под причинно-следственным порядком для вычисления π с.п. р.с. $\mathcal{S}$ будем понимать такой порядок для $\mathfrak{Act}(\pi, \mathcal{S})$

Причинно-следственный порядок событий

Пример

Узел A $(m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\} = \mathbb{f}$:
 do $\{$
 1: $m := \neg m$;
 2: $\mathrm{send}_B(m)$;
 $\}$ **until** $\mathbb{f}$

Узел B $(m : \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$:
 var $m : bool = *$;
 do $\{$
 1: $\mathrm{receive}_A(m)$;
 $\}$ **until** $\mathbb{f}$

$\alpha_1 = (1 : m{:=}\neg m)$, $\alpha_2 = (2 : \mathrm{send}_B(m))$, $\beta = (1 : \mathrm{receive}_A(m))$

Вычисление π:

$(\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\alpha_1,1} (\langle 2, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\alpha_2,1} (\langle 1, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \{\mathbb{t}\}) \xrightarrow{\beta,2} (\langle 1, \mathbb{t}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\alpha_1,1}$
$(\langle 2, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\alpha_2,1} (\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{t}\rangle, \{\mathbb{f}\}) \xrightarrow{\beta,2} (\langle 1, \mathbb{f}\rangle, \langle 1, \mathbb{f}\rangle, \emptyset) \xrightarrow{\alpha_1,1} \dots$

Тогда для π верно следующее:

- $\alpha_1^{(1)} \prec \alpha_2^{(1)} \prec \alpha_1^{(2)} \prec \alpha_2^{(2)} \prec \alpha_1^{(3)} \prec \dots$
- $\beta^{(1)} \prec \beta^{(2)} \prec \dots$
- $\alpha_2^{(1)} \prec \beta^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)} \prec \beta^{(2)}$, $\dots$
- $\alpha_1^{(1)} \prec \beta^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)} \prec \beta^{(2)}$
- $\beta^{(1)} \| \alpha_1^{(2)}$, $\beta^{(1)} \| \alpha_2^{(2)}$, $\beta(2) \| \alpha_1^{(3)}, \dots$
- $\beta^{(2)} \| \alpha_1^{(3)}$, $\dots$

Причинно-следственный порядок событий

Д.з. 2. Доказать, что $\prec$ обязательно является отношением строгого частичного порядка

Д.з. 3. В каких случаях отношение $\prec$ является отношением линейного (полного) порядка?

Д.з. 4. Всегда ли (частично упорядоченное) множество действий с отношением $\prec$ является решёткой? Если нет, то в каких случаях не является?

Причинно-следственный порядок событий

Для последовательности $\mathfrak{S} = (x_1, x_2, \dots)$ и биекции f на множестве $\mathbb{N}$ f-перестановкой последовательности $\mathfrak{S}$ будем называть последовательность $(x_{f(1)}, x_{f(2)}, \dots)$

Перестановкой последовательности $\mathfrak{S}$ будем называть последовательность, хотя бы для одной биекции f являющуюся f-перестановкой последовательности $\mathfrak{S}$

Будем говорить, что f-перестановка последовательности действий $\mathfrak{A}$ р.с. сохраняет порядок $\prec$, если из $\mathfrak{A}(i) \prec \mathfrak{A}(j)$ следует $f(i) < f(j)$ («Если в α — причина β в $\mathfrak{A}$, то α стой́т раньше β в перестановке»)

Если элементы последовательности $\mathfrak{S} = (x_1, x_2, \dots)$ попарно различны, то g-перестановкой для биекции g на этих элементах будем называть её f-перестановку для такой биекции f на $\mathbb{N}$:

$$f(i) = j \Leftrightarrow g(x_i) = x_j$$

Причинно-следственный порядок событий

Теорема (о перестановке действий). Пусть:

- **$\mathfrak{A} = \mathfrak{Act}(\pi, \mathcal{S})$ — последовательность действий вычисления π с.п. р.с. $\mathcal{S}$ с асинхронным обменом сообщениями, исходящего из конфигурации γ;**
- **$\mathfrak{B}$ — f-перестановка последовательности $\mathfrak{A}$, сохраняющая причинно-следственный порядок.**

Тогда существует единственное вычисление π' с.п. р.с. $\mathcal{S}$, исходящее из γ и такое что $\mathfrak{B} = \mathfrak{Act}(\pi', \mathcal{S})$. Кроме того, если π конечно, то π' оканчивается в той же конфигурации, что и π

Доказательство (краткий эскиз). *Единственность π' очевидна*: вычисление однозначно задаётся последовательностью действий

Существование. Как известно, каждая перестановка последовательности $\mathfrak{S}$ может быть получена из $\mathfrak{S}$ последовательной перестановкой соседних элементов

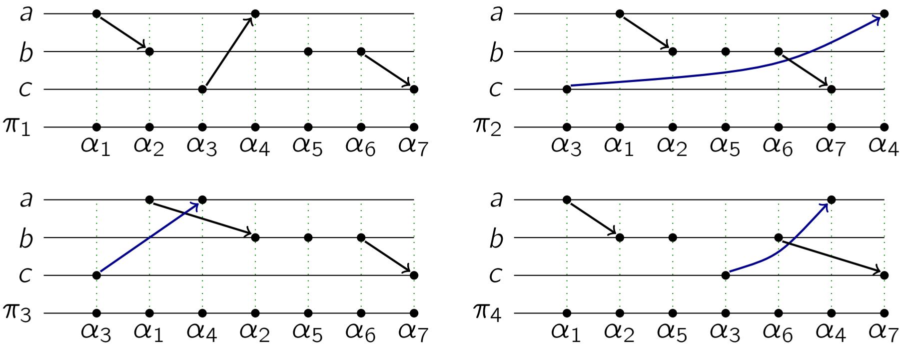
Для перестановки соседних действий при получении $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{A}$ достаточно применить теорему о перестановке соседних действий ▼

Причинно-следственный порядок событий

Последовательности событий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ р.с. будем считать эквивалентными, если одна из них является перестановкой другой, сохраняющей причинно-следственный порядок

Вычисления π' и π'' с.п. р.с. $\mathcal{S}$ будем считать эквивалентными, если эквивалентны $\mathfrak{Act}(\pi', \mathcal{S})$ и $\mathfrak{Act}(\pi'', \mathcal{S})$

Например, следующие вычисления эквивалентны:



Причинно-следственный порядок событий

В вычислениях распределённых алгоритмов точный порядок конфигураций не всегда существенен: действия распределённых систем могут выполняться параллельно, и поэтому разные последовательности действий могут приводить к одному итогу

Поэтому имеет смысл рассматривать вычисления распределённых алгоритмов только *с точностью до* перестановок действий, соответствующих разному фактическому времени выполнения действий, выполняющихся параллельно

Это как раз такие перестановки, которые сохраняют причинно-следственный порядок

Д.з. 5 (трудное). Сформулируйте и докажите аналоги теорем о перестановке соседних действий и о перестановке действий для р.с. с синхронным обменом сообщениями, предложив и соответствующее отношение $\prec$