Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Лекции по основам кибернетики

Вариант 2015 г. (гр. 320–328), глава 3

Москва 2015

Оглавление

Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкретное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно пытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно пытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются некоторые вопросы их структурного моделирования.

Во второй главе изучаются также эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывается полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем, а также изучаются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

В четвертой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем (построение теств для таблиц, синтез самокорректирующихся контактных схем).

Глава 3

Синтез и сложность управляющих систем

§1 Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ, а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса $\mathcal{U}$, то есть отображение $\mathcal{U}$ во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geqslant \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер (ср.с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе $\mathcal{U}$ как минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из $\mathcal{U}$, которые реализуют F. При этом схема Σ, принадлежащая классу $\mathcal{U}$, которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе $\mathcal{U}$ относительно функционала Ψ. В силу монотонности функционала Ψ, минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом L (D, R, и т. д.), будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ F*. Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно функционала сложности* Ψ. В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида $\mathcal{U}^{\text{А}}_{\text{Б}}$ (вида $\mathcal{U}^{\text{А}}$) будем обозначать через $\Psi^{\text{А}}_{\text{Б}}(F)$ (соответственно $\Psi^{\text{А}}(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi^{\text{А}}_{\text{Б}}(n)$ (соответственно $\Psi^{\text{А}}(n)$). В обозначениях классов $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс Б вида Б_0 будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leqslant \Psi''(F),$$

если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности,

$$\Psi^{\text{С}}_{\text{Б}}(F) \leqslant \Psi^{\Phi}_{\text{Б}}(F), \qquad \Psi^{\text{К}}(F) \leqslant \Psi^{\pi}(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют π-схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и. т. п.

Заметим, что для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} L(f_i) \leqslant L(F) \leqslant \sum_{i=1}^{m} L(f)_i .$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1, \qquad L(\Sigma_f) \leqslant n\,|N_f| . \tag{1.1}$$

Следствие 1. *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой сложности 2, а также формулой из $\mathcal{U}^\Phi$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^{\mathrm{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

Следствие 2. *В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство*

$$D(n) \leqslant n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

Лемма 1.2. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, которые реализуют f и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:*

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2, \qquad L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Доказательство. В качестве Σ_f можно взять π-схему, которая получается из $(1, 2^n)$-КД порядка n от БП $x_1, \ldots, x_n$ (рис. 1.1) в результате снятия тех его выходов, где реализу-

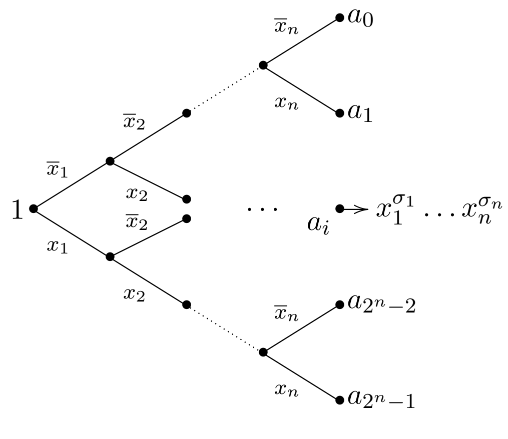

Рис. 1.1: $(1, 2^n)$-контактное дерево порядка n

ются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ f, отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула $\mathcal{F}_f$ получается в результате моделирования построенной π-схемы Σ_f в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \qquad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где $L^-(\Sigma_f)$ — число размыкающих контактов в схеме Σ. Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.

Лемма доказана. □

Следствие.

$$L^\pi(n) \leqslant 2^{n+1} - 2, \tag{1.2}$$

$$L^\Phi(n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 4. \tag{1.3}$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v, а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v, объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v. Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ *операции присоединения* *вершины v к вершине w*. Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ Σ', которая, очевидно, эквивалентна Σ.

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ G, $G \subseteq P_2(n)$, через $\overrightarrow{G}$ будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества G, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ будем называть *универсальной системой* порядка n.

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка n, то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$;
2. мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n;
3. дешифратора $\overrightarrow{Q}_n$ (дизъюнктивного дешифратора $\overrightarrow{J}_n$) порядка n;
4. универсальной системы $\overrightarrow{P}_2(n)$ порядка n.

Лемма 1.3. *Для каждого натурального n в $\mathfrak{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$ существует СФЭ U_n, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^{2^n} - n$.*

Доказательство. В силу полноты базиса, в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ существует система формул Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n, включая n ее входов, равно 2^{2^n} и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие.
$$L_{\text{Б}}^{\text{С}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2^{2^n} - n.$$

§2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

Лемма 2.1. *Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^{\text{С}}(f) \geqslant n - 1, \qquad L^{\text{К}}(f) \geqslant n. \tag{2.1}$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i, $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^{\text{С}}(f) \geqslant n \qquad (\textit{соответственно } L^{\text{К}}(f) \geqslant n + k). \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть Σ_f — минимальная по сложности СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, реализующая ФАЛ f. Из существенной зависимости ФАЛ f от БП $x_1, \ldots, x_n$ следует, что $R(\Sigma_f) \geqslant n$, и поэтому, в силу соотношений (2.6) главы 2,

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geqslant n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ f не является монотонной ФАЛ, то схема Σ_f должна содержать хотя бы один ФЭ $\neg$ и, следовательно, в указанном случае

$$L^{\mathrm{C}}(f) = L(\Sigma_f) \geqslant n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Пусть теперь Σ_f — минимальная по сложности $(1,1)$-КС, реализующая ФАЛ f. Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_i, $i \in [1, n]$, следует, что либо контакт вида x_i, либо контакт вида $\overline{x}_i$ встречается в КС Σ_f, и поэтому

$$L^{\mathrm{K}}(f) = L(\Sigma_f) \geqslant n.$$

Если же, кроме того, БП x_i, $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f, то как контакт вида x_i, так и контакт вида $\overline{x}_i$ входят в Σ_f, и, следовательно, в данном случае

$$L^{\mathrm{K}}(f) = L(\Sigma_f) \geqslant n + k.$$

Лемма доказана. □

Следствие.

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \geqslant n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\ell_n) \geqslant 2n,$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^n + n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\mu_n) \geqslant 2^n + 2n.$$

Замечание. Нижние оценки сложности ФАЛ $f = s_n^{[0,n-1]}$, вытекающие из леммы 2.1, доказывают минимальность π-схемы, моделирующей ЭД $\overline{x}_1 \vee \cdots \vee \overline{x}_n = f$, в классе КС и миниальность формулы $\overline{(x_1 \ldots x_n)} = f$ в классе СФЭ, что устанавливает равенства $L^{\text{К}}(f) = n$ и $L^{\text{С}}(f) = n$.

Лемма 2.2. *Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^{\text{К}}(F) \geqslant m \qquad (\textit{соответственно } L^{\text{С}}_{\text{Б}}(F) \geqslant m). \qquad (2.3)$$

Доказательство. Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ f_i, $i = 1, \ldots, m$, реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь Σ_F — приведенная $(1, m)$-КС, реализующая систему ФАЛ F. Из приведенности Σ_F и условий леммы вытекает, что Σ_F — связный граф с не менее чем $(m+1)$ вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geqslant |V(\Sigma_F)| - 1 \geqslant m.$$

Лемма доказана. □

Следствие.

$$L^{\text{С}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n,$$
$$L^{\text{С}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n,$$
$$L^{\text{С}}_{\text{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - n, \qquad L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - 2.$$

Замечание. В силу следствия универсальная СФЭ U_n, построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$.

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для некоторых ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

Лемма 2.3. *Для любого натурального n выполняются неравенства:*

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}),\ L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}); \quad (2.4)$$

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^{n+1} - 2; \quad (2.5)$$

$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 2, \qquad L^{\Phi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+2} - 3; \quad (2.6)$$

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \leqslant 4n - 4, \qquad L^{\mathrm{C}}(\overline{\ell}_n) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (2.7)$$

Доказательство. В классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$ построим схемный дешифратор порядка n, удовлетворяющий первому неравенству (2.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП $X(n)$ на группы $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, где $q = \lceil n/2 \rceil$;
2. возьмем дешифраторы Σ' и Σ'' от БП x' и x'' порядка q и $(n-q)$ соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ Σ' и Σ'', после чего конъюнктируем каждый выход Σ' с каждым выходом Σ'', а выходы всех использованных для этого 2^n ФЭ & (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Аналогичным образом строится дизъюнктивный схемный дешифратор порядка n, удовлетворяющий второму неравенству (2.4).

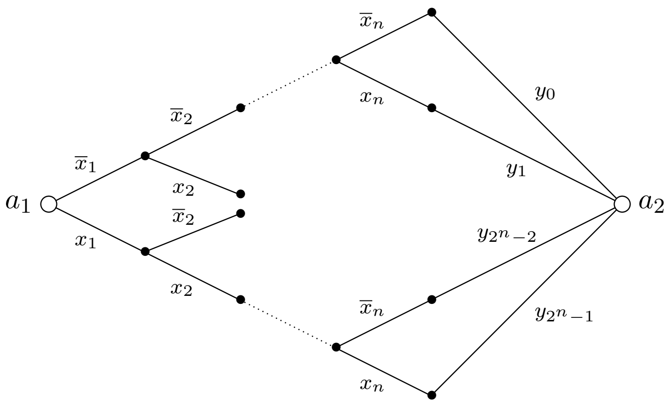

Рис. 2.1: примеры π-схем

Искомым контактным дешифратором порядка n является $(1, 2^n)$-контактное дерево, показанное на рис. 1.1, а искомым контактным мультиплексором порядка n является π-схема, приведенная на рис. 2.1. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 1.1 и 2.1, равна $2^{n+1} - 2$ и $3 \cdot 2^n - 2$ соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.5) и (2.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно $2^n - 1$.

В результате моделирования указанной π-схемы можно построить бесповторную по информационным БП формулу

$$\mathcal{F}_n\left(x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1}\right) =$$
$$= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\cdots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} \right) \cdots \right) \right),$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.6), так как

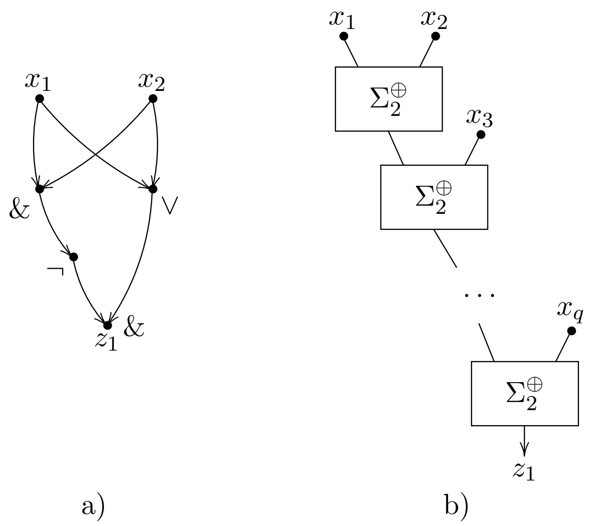

Рис. 2.2: пример суперпозиции СФЭ

реализует ФАЛ μ_n и имеет сложность $4 \cdot 2^n - 3$.

Неравенства (2.7) при $n = 1$, очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ ℓ_n, $n \geqslant 2$, со сложностью (2.7), является СФЭ $\Sigma_n^{\oplus}$, показанная на рис. 2.2a,b. Аналогичная СФЭ для ФАЛ $\overline{\ell}_n$ получается в результате замены ФЭ & на ФЭ $\vee$ и ФЭ $\vee$ на ФЭ & в первой подсхеме вида $\Sigma_2^{\oplus}$ схемы $\Sigma_n^{\oplus}$ (см. рис. 2.2a).

Лемма доказана. □

Следствие.

$$L^C(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^C(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n.$$

Лемма 2.4. *Если система ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от* 0 *и*

1, *то*

$$L^{\text{К}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} \left|N_{f_j}\right|.$$

Доказательство. Возьмем приведенную $(1,m)$-КС Σ, реализующую систему ФАЛ F, и заметим, что при любом α, $\alpha \in B^n$, в сети $\Sigma|_\alpha$ имеется связная компонента, которая содержит вход Σ и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе α. Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E\left(\Sigma|_\alpha\right)| \geqslant f_1(\alpha) + \cdots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам α, $\alpha \in B^n$, придем (см. доказательство леммы **??**) к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geqslant \sum_{j=1}^{m} \left|N_{f_j}\right|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана. □

Следствие.

$$L^{\text{К}}(J_n) \geqslant 2^{n+1} - 2.$$

Замечание. В силу следствия $(1,4)$-КС с входом a, которая состоит из двух непересекающихся по внутренним вершинам $(a-a)$-цепей (циклов) с ЭК провеодимости $\overline{x}_1 x_2 x_1$ и $\overline{x}_1 \overline{x}_2 x_1$, является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.

Лемма 2.5. *Если для ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и для любого σ, $\sigma \in B$, ФАЛ $f_\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то*

$$L^{\text{С}}_{\&,\vee}(f) \geqslant \min\{L^{\text{С}}_{\&,\vee}(f_0), L^{\text{С}}_{\&,\vee}(f_1)\} + 2. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть Σ — минимальная по числу ФЭ & и $\vee$ СФЭ из класса $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, которая реализует ФАЛ f и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ $\neg$. Из условия леммы следует, что выход ФЭ $\neg$, присоединённого к входу x_n СФЭ Σ не может быть её выходом.

Пусть цепь C соединяет вход x_n СФЭ Σ с её выходом z_1 и пусть константа σ, $\sigma \in B$, равна 0 тогда и только тогда, когда БП x_n подается в C либо на вход ФЭ &, либо на вход ФЭ $\neg$, к выходу которого в C присоединён ФЭ $\vee$.

Рассмотрим СФЭ $\widehat{\Sigma}$, которая реализует ФАЛ f_σ, $f_\sigma \not\equiv 0, 1$, и получена из СФЭ Σ в результате подстановки $x_n = \sigma$, а также последующего ЭП на основе тождеств $\underline{\tau}^{\text{ПК}}$ (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедимся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа & или $\vee$.

Действительно, в случае $\sigma = 0$ из СФЭ Σ будет удален ФЭ $\mathcal{E}'$, являющийся первым ФЭ типа & или $\vee$ цепи C. Заметим, что выход ФЭ $\mathcal{E}'$ не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ $\neg$, выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ f_σ была бы равна константе. Следовательно, на цепи C СФЭ Σ имеется ФЭ $\mathcal{E}''$ типа & или $\vee$, на вход которого поступает либо выход $\mathcal{E}'$, либо выход ФЭ $\neg$, присоединенного к выходу $\mathcal{E}'$. Легко видеть, что ФЭ $\mathcal{E}''$ тоже будет удален при переходе от Σ к $\widehat{\Sigma}$ и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&,\vee}(f) = L_{\&,\vee}(\Sigma) \geqslant L_{\&,\vee}(\widehat{\Sigma}) + 2 \geqslant L_{\&,\vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (2.8).

Случай $\sigma = 1$, когда БП x_n подаётся в C либо на вход ФЭ $\vee$, либо на вход ФЭ $\neg$, к выходу которого присоединён ФЭ типа &, рассматривается аналогично.

Лемма доказана. $\square$

Следствие 1.

$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^{n+1} + n - 1. \qquad (2.9)$$

Действительно, (2.9) получается в результате применения леммы 2.5 последовательно ко всем информационным БП $y_{2^n-1}, \ldots, y_1$ и учитывая, что получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП $x_1, \ldots, x_n, y_0$.

Следствие 2. *Из* (2.9) *в силу леммы 4.1 главы 2 вытекеает неравенство*

$$D(\mu_n) \geqslant n + 1.$$

Замечание. В силу следствия 1 формула $\overline{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$ является минимальной СФЭ, раеализующей ФАЛ μ_1 и $L^{\mathrm{C}}(\mu_1) = 4$.

Литература

[1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.

[4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.

[5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова.* Т. 1. М.: Наука, 1974.

[7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.

[8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

[9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.

[10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5-44.

[11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39

[12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.

[13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.

[14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.

[16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.

[17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

// Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.

[18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.

[19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.

[20] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.

[22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.

[23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.

[24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.

[25] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.

[26] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.

[27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИ АН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

[28] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.

[29] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[30] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.

[31] *Яблонский С. В.* Эквивалентные преобразования управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[32] *Cardot C.* Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.

[33] *Shannon C. E.* The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).

[34] *Wegener I.* Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.