Математическая логика

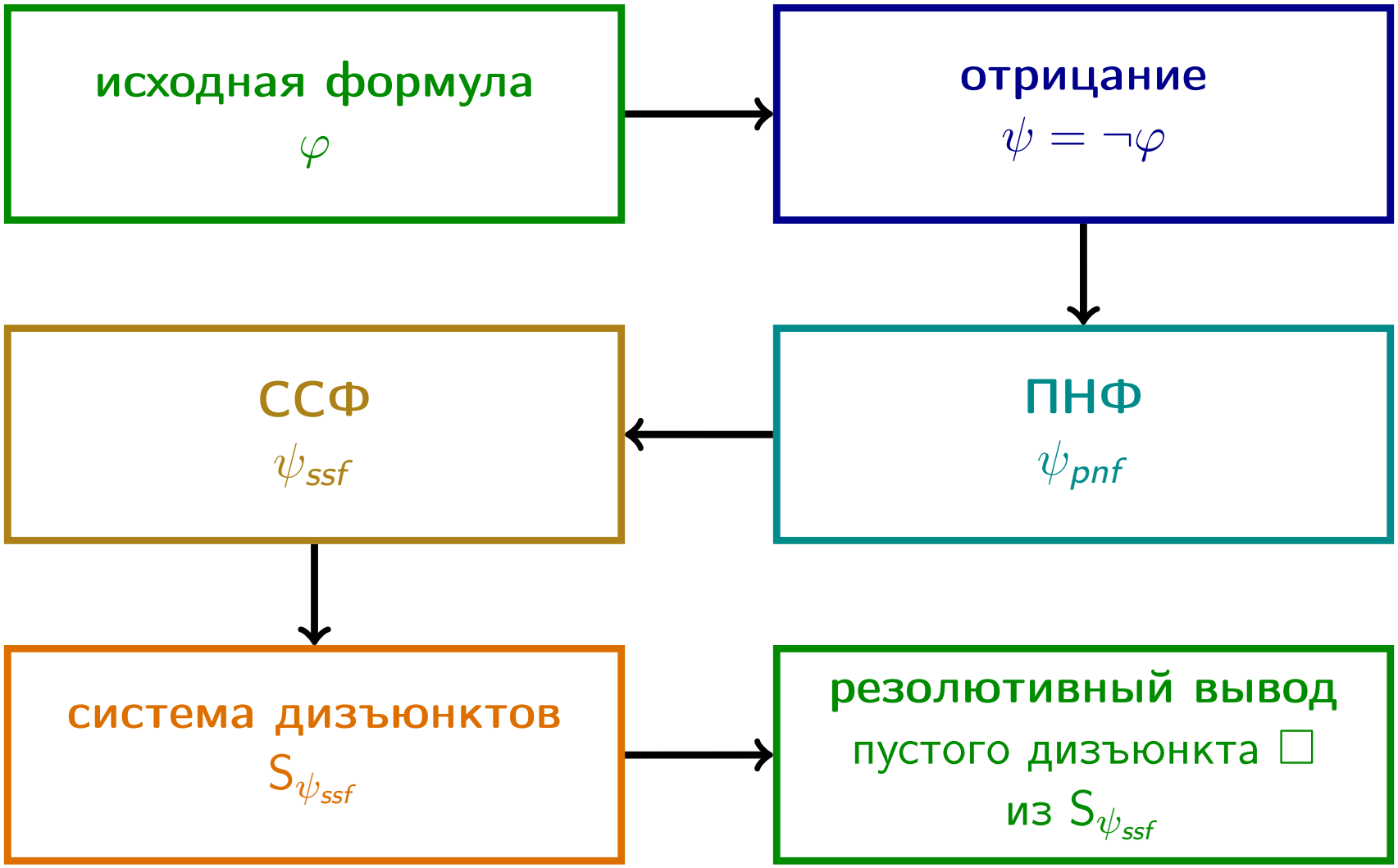
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 22

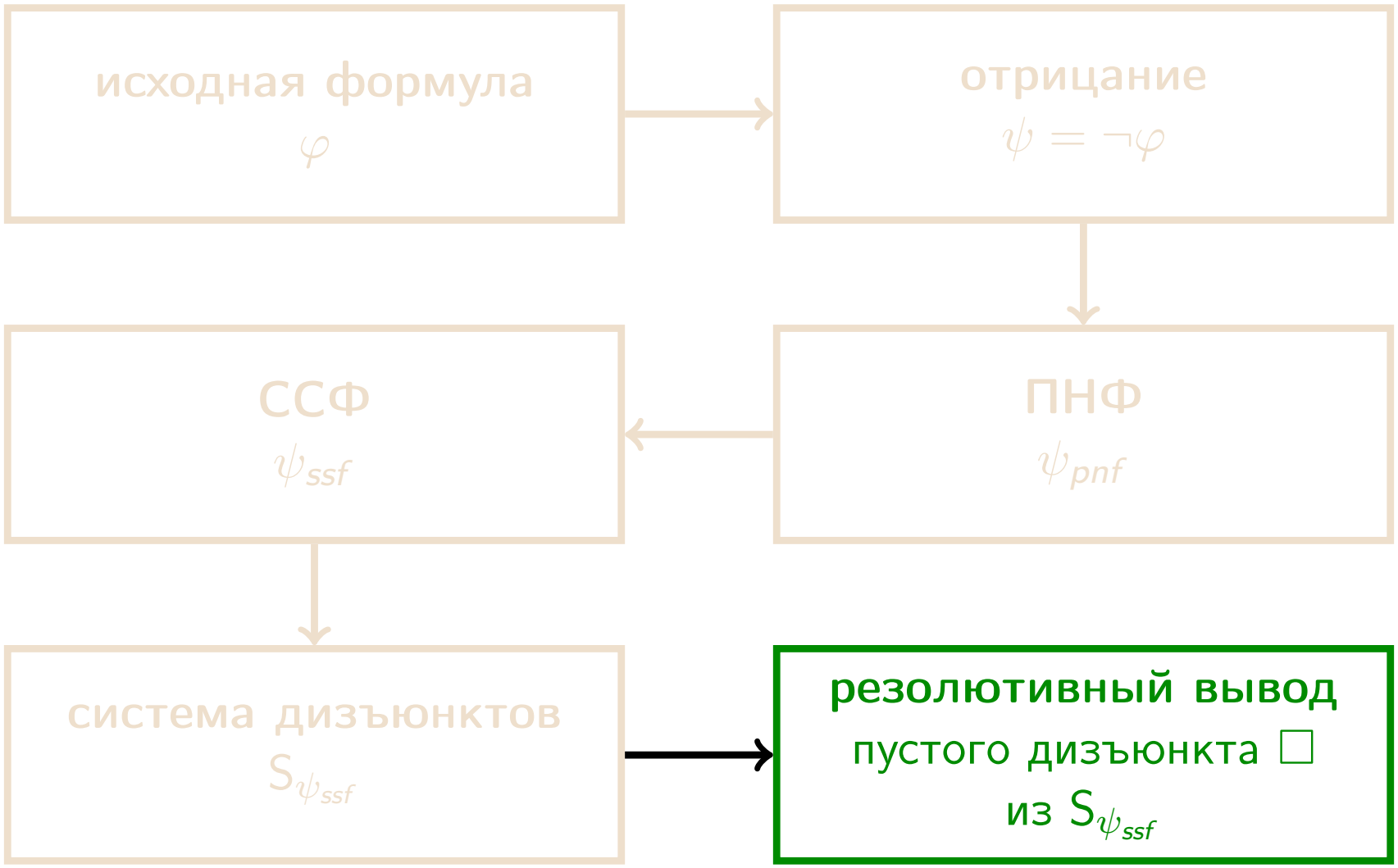
Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Если E — логическое выражение и θ — подстановка, то:

- $E\theta$ — пример выражения E
- если $\mathrm{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- если $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Var}$ — биекция, то
  - θ — переименование
  - $E\theta$ — вариант выражения E

Ещё немного определений

Пример

Рассмотрим выражение $E = \mathrm{P}(\mathtt{x}, \mathbf{f}(\mathtt{y})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathtt{y}, \mathbf{c})$ и подстановки

$$\begin{aligned}
\theta &= \{\mathtt{x}/\mathtt{u}, \mathtt{y}/\mathtt{z}, \mathtt{u}/\mathtt{x}, \mathtt{z}/\mathtt{y}\} \\
\eta &= \{\mathtt{x}/\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathtt{y}/\mathtt{z}\} \\
\mu &= \{\mathtt{z}/\mathbf{c}\} \\
\varepsilon &= \{\}
\end{aligned}$$

Тогда:

- $E\eta = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathtt{z})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathtt{z}, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- $E\eta\mu = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- подстановки θ и ε — переименования
- $E\theta = \mathrm{P}(\mathtt{u}, \mathbf{f}(\mathtt{z})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathtt{z}, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Правило резолюции

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x,z), f(z)) \qquad Q(x) \vee R(y,x) \vee \neg P(g(z,y), z)}{\neg R(g(g(f(y),y), f(y)), f(f(y))) \vee Q(g(f(y),y)) \vee R(y, g(f(y),y))}$$

резольвента

$$\theta = \{x/g(f(y),y),\ z/f(y)\} \in \text{НОУ}(P(x, f(y)), P(g(z,y), z))$$

резольвента: $(\neg R(g(x,z), f(z)) \vee Q(x) \vee R(y,x))\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x,z), f(z)) \qquad Q(x) \vee R(y,x) \vee \neg P(g(z,y),z)}{P(f(z), f(g(f(z),z))) \vee Q(f(z)) \vee \neg P(g(z, g(f(z),z)),z)}$$

резольвента

$$\theta = \{x/f(z),\ y/g(f(z),z)\} \in \text{НОУ}(R(g(x,z),f(z)), R(y,x))$$

резольвента: $(P(x, f(y)) \vee Q(x) \vee \neg P(g(z,y),z))\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \qquad \neg\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))$$

$$\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}), \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})))$$

резольвента: $(???)\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{[\mathbb{f} \vee]\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \qquad \neg\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))\ [\vee\ \mathbb{f}]}{\square}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}), \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})))$$

резольвента: $(\mathbb{f} \vee \mathbb{f})\theta$

Пара полезных вспомогательных утверждений

Утверждение (монотонность логического следования в ЛП)

Для любых множеств предложений Γ, Δ
и любого предложения φ верно: $\Gamma \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \models \varphi$

Доказательство. Пусть $\Gamma \models \varphi$.
Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi$ ▼

Утверждение (монотонность дизъюнкции в ЛП)

Для любого множества предложений Γ
и любых формул $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ верно:

$$\Gamma \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\varphi \vee \psi)$$

Доказательство. Пусть $\Gamma \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi$.
Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$\mathcal{I} \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi \quad \Rightarrow$

для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Rightarrow$

для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d}^n] \quad \Rightarrow$

$\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\varphi \vee \psi)$ ▼

Правило резолюции

Лемма (о корректности правила резолюции)

Если D **— резольвента дизъюнктов** D_1**,** D_2**, то** $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}$

Доказательство. (кванторные приставки опущены)

Пусть $\mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_1' \vee \mathsf{L}_1$, $\mathsf{D}_2 = \mathsf{D}_2' \vee \neg\mathsf{L}_2$, $\theta \in \text{НОУ}(\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$,

$\mathsf{D} = (\mathsf{D}_1' \vee \mathsf{D}_2')\theta$ и $\mathsf{L}_1\theta = \mathsf{L}_2\theta = \mathsf{L}$

Тогда будет верно следующее:

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{D}_1 & \models \mathsf{D}_1\theta & \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}_2\theta \\
\mathsf{D}_1 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{L}_1\theta & \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg\mathsf{L}_2\theta \\
\mathsf{D}_1 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{L} & \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg\mathsf{L} \\
\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{L} & \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg\mathsf{L} \\
\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{D}_2'\theta \vee \mathsf{L} & \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg\mathsf{L}
\end{array}
$$

Заметим, что если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$ (очевидно?)

Тогда $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{D}_2'\theta$

То есть $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}$ ▼

Правило склейки

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести $\square$ из невыполнимой системы

Например:

$$\mathrm{P}(\mathtt{x}) \vee \mathrm{P}(\mathbf{c})$$
$$\neg\mathrm{P}(\mathbf{c}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathtt{y})$$

Система из таких двух дизъюнктов невыполнима, но все резольвенты, резольвенты резольвент, ... этих дизъюнктов имеют ровно две литеры

Необходимо иметь правило,
которое позволит получать $\square$ и из таких систем

Правило склейки

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Правило склейки

Пример

склеиваемая пара

$$\frac{P(x) \quad \vee \quad \neg R(y, z, f(x)) \quad \vee \quad \neg R(x, f(c), z)}{P(c) \vee \neg R(c, f(c), f(c))}$$

склейка

$$\theta = \{x/c, y/c, z/f(c)\} \in \text{НОУ}(\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z))$$

склейка: $(P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)))\theta$

Лемма (о корректности правила склейки)

Если D **— склейка дизъюнкта** D_1**, то** $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$\mathrm{D}_1, \ \ldots, \ \mathrm{D}_i, \ \ldots, \ \mathrm{D}_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводи́м из S, если существует
резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) \\ \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

вариант	$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1)$
вариант	$\neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathbf{g}(\mathrm{x}_2))$
резольвента	$\mathrm{R}(\mathrm{x}_3, \mathbf{g}(\mathrm{x}_3))$
вариант	$\neg\mathrm{R}(\mathrm{x}_4, \mathrm{u}_4)$
резольвента	$\square$

Следовательно, $\square$ резолютивно выводи́м из системы S

Резолютивный вывод

Другой пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \neg P(f(x), z) \vee \neg P(y, y) \\ P(x, f(y)) \vee R(y) \\ \neg R(y) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

вариант	$P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$
вариант	$\neg R(y_2)$
резольвента	$P(x_3, f(y_3))$
вариант	$\neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
склейка	$\neg P(f(x_5), f(x_5))$
резольвента	$\square$

Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например: $S = \{\neg \mathrm{P}(\mathtt{x}),\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}))\}$

НОУ$(\mathrm{P}(\mathtt{x}), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S невыполнима:

у формул $\forall \mathtt{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathtt{x})$ и $\forall \mathtt{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}))$ **нет общих моделей**

К **вариантам** дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{\mathtt{x}_1/\mathbf{f}(\mathtt{x}_2)\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathtt{x}_1), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x}_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$\forall \mathtt{x}\ \varphi \sim \forall \mathtt{y}\ (\varphi\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\})$, если <...>

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод успешен,
если он оканчивается пустым дизъюнктом ($\square$)

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением:

- предположим, что
  исходная система дизъюнктов выполнима
- тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода,
  также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов
  есть тождественно ложный ($\square$), а значит,
  расширенная система дизъюнктов невыполнима
- полученное противоречие
  опровергает выполнимость исходной системы
  (*доказывает невыполнимость методом «от противного»*)

Ещё одно вспомогательное утверждение

Утверждение (транзитивность логического следования)

Для любого множества предложений Γ и любых предложений $\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi$ верно:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \models \psi_1 \\ \ldots \\ \Gamma \models \psi_k \\ \psi_1, \ldots, \psi_k \models \varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

Доказательство. Пусть верны все соотношения слева от «$\Rightarrow$». Тогда для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \text{ и } \ldots \text{ и } \mathcal{I} \models \psi_k$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \blacktriangledown$$

Корректность резолютивного вывода

Теорема (о корректности резолютивного вывода)
Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводи́м $\square$, то система S невыполнима

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносилен D, а значит, $\mathrm{D} \models \mathrm{D}'$

По корректности правила резолюции:
если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2, то $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \models \mathrm{D}''$

По корректности правила склейки:
если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3, то $\mathrm{D}_3 \models \mathrm{D}'''$

Значит, по транзитивности логического следования,
любой дизъюнкт, выводимый из S,
является логическим следствием S, и в частности, $S \models \square$

При этом дизъюнкт $\square$ не имеет ни одной модели,
а значит, и система S не имеет ни одной модели ▼