Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 24

Консервативные расширения систем процессов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

$$p \ ::= \ a \ \mid \ \boldsymbol{\delta} \ \mid \ (p+p) \ \mid \ (p.p) \ \mid \ (p \| p) \ \mid \ (p \lfloor\!\lfloor p) \ \mid \ (p|p) \ \mid \ \partial_X(p)$$

$$\frac{}{a \xrightarrow{a} \checkmark} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} p'}{p+q \xrightarrow{a} p'} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} q'}{p+q \xrightarrow{a} q'} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p.q \xrightarrow{a} \widetilde{p}.q} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p.q \xrightarrow{a} q}$$

$$\frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p \| q \xrightarrow{a} \widetilde{p} \| q} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} \widetilde{q}}{p \| q \xrightarrow{a} p \| \widetilde{q}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p \| q \xrightarrow{a} q} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} \checkmark}{p \| q \xrightarrow{a} p}$$

$$\dots \ \dots$$

Семантические правила для операций BPA, PAP и ACP вводились последовательно независимо друг от друга, и *содержательно* предполагалось, что правила для новых операций не изменяют смысл имеющихся

Но в общем случае это не обязательно так

Вступление

Например, если добавить в модель операцию $\circ$ с правилами

$$\frac{}{(p\|q)\circ q \xrightarrow{a} a\circ q} \qquad \text{и} \qquad \frac{p\circ q \xrightarrow{a} p'\circ q}{p \xrightarrow{a} p'},$$

то появится, например, такой вывод:

$$\frac{\overline{(a\|b)\circ b \xrightarrow{c} c\circ b}}{a\|b \xrightarrow{c} c}$$

То есть такое добавление операции $\circ$ повлияло на переходы для процесса $a\|b$, не содержащего $\circ$, и тем самым существенно изменило (*а не только расширило*) семантику операции $\|$

Хотелось бы быть уверенным в том, что при добавлении новой операции в систему процессов семантика (и все семантические свойства) имеющихся операций не изменяется

Определения и свойства

Системой процессов будем называть пару $\mathfrak{P} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{R})$, состоящую из

- множества операций $\mathfrak{o}$ с приписанными им местностями
  - ($\circ^{(k)}$ — операция $\circ$ местности k)
- множество правил вывода $\mathfrak{R}$

Содержательно,

- $\mathfrak{o}$ — это операции (в том числе константы — 0-местные операции), использующиеся в записи процессов (в пунктах БНФ)
- $\mathfrak{R}$ — это правила вывода, определяющие семантику этих операций

Например, BPA — это система процессов $(\{.^{(2)}, +^{(2)}\}, \mathfrak{R}_{bpa})$

Для систем процессов $\mathfrak{P}_1 = (\mathfrak{o}_1, \mathfrak{R}_1)$ и $\mathfrak{P}_2 = (\mathfrak{o}_2, \mathfrak{R}_2)$ записью $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$ обозначим систему процессов $(\mathfrak{o}_1 \cup \mathfrak{o}_2, \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2)$

Будем говорить, что система $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$ является консервативным расширением системы $\mathfrak{P}_1$, если для любого процесса системы $\mathfrak{P}_1$ его процессные графы в $\mathfrak{P}_1$ и в $\mathfrak{P}_2$ совпадают

Определения и свойства

Истоком правила вывода назовём запись процесса в левой части шага вычисления под чертой

Введём понятие зависимости параметра x в правиле вывода ρ индуктивно так:

- Все параметры, встречающиеся в источнике правила, зависимы
- Если шаг $p \xrightarrow{a} q$ записан в правиле над чертой и все параметры, встречающиеся в p, зависимы, то и все параметры, встречающиеся в q, зависимы

Правило вывода назовём зависимым, если все параметры, встречающиеся в нём не над $\to$, зависимы

Систему правил вывода назовём зависимой, если все содержащиеся в ней правила вывода зависимы

Определения и свойства

Примеры

$$\frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p \| q \xrightarrow{a} \widetilde{p} \| q}$$

В этом правиле не над $\to$ используются параметры p, q и $\widetilde{p}$

Истоком этого правила является запись $p\|q$

Значит, параметры p и q зависимы

Так как p зависим и над чертой содержится шаг $p \xrightarrow{a} \widetilde{p}$, то зависим и параметр $\widetilde{p}$

Значит, все параметры правила, встречающиеся не над $\to$, зависимы

То есть это правило зависимо

$$\frac{}{(p\|q) \circ q \xrightarrow{a} a \circ q}$$

Параметр a встречается не над $\to$ и при этом независим

Значит, это правило независимо

Определения и свойства

Запись процесса в правиле вывода будем называть свежей относительно операций $\mathfrak{o}$, если в этой записи содержится хотя бы одна операция не из $\mathfrak{o}$

Теорема (Fokkink, Verhoef, 1998; упрощённая формулировка без доказательства). Для любых систем процессов $\mathfrak{P}_1 = (\mathfrak{o}_1, \mathfrak{R}_1)$ и $\mathfrak{P}_2 = (\mathfrak{o}_2, \mathfrak{R}_2)$ верно следующее. Если

- **система $\mathfrak{R}_1$ зависима и**
- **для любого правила $\rho \in \mathfrak{R}_2$ верно хотя бы одно из двух:**
  - **исток правила ρ является свежим относительно $\mathfrak{o}_1$, или**
  - **над чертой в ρ содержится запись шага вычисления $x \xrightarrow{a} y$, где**
    - **запись x несвежая относительно $\mathfrak{o}_1$,**
    - **все параметры, встречающиеся в x, содержатся в истоке ρ и**
    - **запись y свежая относительно $\mathfrak{o}_1$,**

то $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$ — консервативное расширение системы $\mathfrak{P}_1$

Примеры консервативных расширений

BPA содержит операции $.^{(2)}$ и $+^{(2)}$ и правила

$$\frac{}{a \xrightarrow{a} \checkmark} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} p'}{p+q \xrightarrow{a} p'} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} q'}{p+q \xrightarrow{a} q'} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p.q \xrightarrow{a} \widetilde{p}.q} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p.q \xrightarrow{a} q}$$

Все эти правила зависимы

Семантика операции $\|^{(2)}$ задаётся правилами

$$\frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p\|q \xrightarrow{a} \widetilde{p}\|q} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} \widetilde{q}}{p\|q \xrightarrow{a} p\|\widetilde{q}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p\|q \xrightarrow{a} q} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} \checkmark}{p\|q \xrightarrow{a} p}$$

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark,\ q \xrightarrow{b} \checkmark}{p\|q \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark,\ q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{p\|q \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{q}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p},\ q \xrightarrow{b} \checkmark}{p\|q \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p},\ q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{p\|q \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p}\|\widetilde{q}}$$

Истоки всех этих восьми правил свежи относительно $\{., +\}$

Значит, при добавлении операции $\|$ и этих правил в систему процессов получается консервативное расширение BPA

То есть семантика процессов, построенных над . и $+$, не изменяется при добавлении $\|$

Кроме того, все эти правила зависимы

Примеры консервативных расширений

Семантика операции $\lfloor\!\lfloor^{(2)}$ задаётся правилами

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p \lfloor\!\lfloor q \xrightarrow{a} q} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p \lfloor\!\lfloor q \xrightarrow{a} \widetilde{p} \| q}$$

Истоки обоих правил свежи относительно $\{., +, \|\}$

Значит, при добавлении $\lfloor\!\lfloor$ и этих правил в систему процессов получается консервативное расширение

Кроме того, оба этих правила зависимы

Семантика операции $|$ задаётся правилами

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} \checkmark}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark} \quad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{q}} \quad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}, q \xrightarrow{b} \checkmark}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p}} \quad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}, q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p} \| \widetilde{q}}$$

Истоки всех этих правил свежи относительно $\{., +, \|, \lfloor\!\lfloor\}$

Значит, при добавлении $|$ и этих правил в систему процессов получается консервативное расширение

Кроме того, все эти правила зависимы

Примеры консервативных расширений

Добавление операции блокировки $\boldsymbol{\delta}^{(0)}$ не сопровождается добавлением правил вывода, а значит, при добавлении этой операции получается консервативное расширение

Семантика операции $\partial^{(2)}$ $(\partial(X,p) = \partial_X(p))$ задаётся правилами

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{\partial_X(p) \xrightarrow{a} \checkmark} \qquad\qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{\partial_X(p) \xrightarrow{a} \partial_X(\widetilde{p})}$$

Истоки обоих этих правил свежи относительно $\{., +, \|, \lfloor\!\lfloor, |, \boldsymbol{\delta}\}$

Значит, при добавлении ∂_X и этих правил в систему процессов получается консервативное расширение

Следовательно система ACP является консервативным расширением системы PAP, а система PAP — консервативным расширением системы BPA

Кроме того, два изображённых выше правила вывода зависимы, а значит, можно аналогично продолжать консервативно расширять систему ACP

Пример неконсервативного расширения

$$\frac{}{(p \| q) \circ q \xrightarrow{a} a \circ q}$$

Источник этого правила свеж относительно операций ACP

Значит, если добавить в ACP операцию $\circ^{(2)}$ с этим правилом, то получается консервативное расширение

Но это правило независимо, а значит, к дальнейшим расширениям последняя теорема неприменима

$$\frac{p \circ q \xrightarrow{a} p' \circ q}{p \xrightarrow{a} p'}$$

Источник этого правила несвеж, и в единственной записи шага вычисления над чертой левая часть свежая

Значит, к этому правилу неприменима последняя теорема

Независимо от этого ранее было показано, что добавление этого правила вместе с «допустимым» правилом выше получается неконсервативное расширение