Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы
$\rightarrow$ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 35

Хорновские логические программы:
полнота операционной семантики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Вступление

Для ХЛП определены две семантики:

1. Декларативная (основная):
   - Программа — это система формул
   - Правильный ответ — это подстановка целевых переменных, при применении которой к запросу он следует из программы
2. Операционная (вспомогательная):
   - Шаг вычисления программы — это применение правила SLD-резолюции
   - SLD-вычислимый ответ — это композиция подстановок, получаемых по ходу вычисления, спроектированная на целевые переменные

Показано, что каждый SLD-вычислимый ответ является правильным

А верно ли утверждение в обратную сторону?
(*О том, что любой правильный ответ обязательно является SLD-вычислимым*)

Особенности полноты операционной семантики

Рассмотрим такой **пример**:

$$\begin{array}{l} \mathrm{p}(\mathbf{f}(\mathtt{X}), \mathbf{c}) \leftarrow \mathrm{r}(\mathtt{X}); \\ \mathrm{r}(\mathtt{X}); \\ ?\mathrm{p}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \end{array}$$

Правильным ответом на этот запрос к этой программе является, например, подстановка $\{\mathtt{X}/\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathtt{Y}/\mathbf{c}\}$

При этом единственный (*с точностью до переименования*) SLD-вычислимый ответ $\{\mathtt{X}/\mathbf{f}(\mathtt{X}), \mathtt{Y}/\mathbf{c}\}$ не совпадает с правильным

Значит, *ожидаемое* утверждение «любой правильный ответ является SLD-вычислимым» заведомо неверно

Но упомянутый правильный ответ является *частным случаем* вычисленного:

$$\{\mathtt{X}/\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathtt{Y}/\mathbf{c}\} = \{\mathtt{X}/\mathbf{f}(\mathtt{X}), \mathtt{Y}/\mathbf{c}\}\{\mathtt{X}/\mathbf{c}\}$$

Докажем полноту операционной семантикис поправкой на это наблюдение: **каждый правильный ответ является частным случаем вычисленного**

Общая схема обоснования полноты

Подстановку θ будем называть частным случаем подстановки η, а подстановку η — обобщением подстановки θ, если существует подстановка μ, такая что $\theta = \eta\mu$

Записью $[\mathcal{P}]$ обозначим *бесконечную* ХЛП, состоящую из всех основных примеров всех правил ХЛП $\mathcal{P}$ в произвольном порядке

Полнота операционной семантики будет обосновываться так:

1. Рассмотрим произвольный правильный ответ θ на запрос $\mathcal{Q}$ к программе $\mathcal{P}$
2. Покажем, как построить успешное вычисление ответа ε на особый основной запрос $\mathcal{Q}\theta\eta$ к бесконечной программе $[\mathcal{P}]$ (лемма об основных вычислениях)
3. Покажем, как преобразовать построенное вычисление на запрос $\mathcal{Q}\theta\mu$ к $[\mathcal{P}]$ в успешное вычисление некоторого обобщения η ответа $\theta\mu$ на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$ (лемма о подъёме вычисления)
4. Покажем, что ответ θ — частный случай ответа η

Лемма об основных вычислениях

Для любой ХЛП $\mathcal{P}$ и любого основного запроса $\mathcal{Q}$, такого что $S_{\mathcal{P}} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$, существует успешое SLD-резолютивное вычисление, порождённое запросом $\mathcal{Q}$ к $[\mathcal{P}]$

Доказательство

Пусть $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$

Согласно теореме о логическом следствии, если $S_{\mathcal{P}} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$, то формула $\Phi_{\mathcal{R}_1} \,\&\, \ldots \,\&\, \Phi_{\mathcal{R}_n} \rightarrow \Phi_{\mathcal{Q}}$ общезначима

Следовательно, система дизъюнктов $\{\Phi_{\mathcal{R}_1}, \ldots, \Phi_{\mathcal{R}_n}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}}\}$, отвечающая отрицанию этой формулы, невыполнима

По теореме Эрбрана, существует конечный набор основных примеров $D_1, \ldots, D_m$ дизъюнктов из $\{D_{\mathcal{R}_1}, \ldots, D_{\mathcal{R}_n}\}$, такой что система основных дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m, \neg\Phi_{\mathcal{Q}}\}$ невыполнима

Согласно соответствиям между запросами, правилами и дизъюнктами и между SLD-резолютивными вычислениями и резолютивными выводами, осталось показать, что существует входной вывод $\square$ из S, инициированный дизъюнктом $\neg\Phi_{\mathcal{Q}}$

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \ldots, D_m, \neg\Phi_{\mathcal{Q}}\}$; $S : \neg\Phi_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \square$?

По теореме о полноте резолютивного вывода, существует вывод $\mathfrak{D}$ пустого дизъюнкта $\square$ из S

Но этот этот вывод не обязан быть входным, и тем более инициированным $D_{\mathcal{Q}}$

Осталось показать, как перестроить вывод $\mathfrak{D}$ во входной, инициированный $\neg\Phi_{\mathcal{Q}}$

В качестве отправной точки используем тот факт, что $\square$ может быть получен **только** как резольвента запроса и правила (но не обязательно правила из S), а значит, в выводе есть хотя бы один запрос, и $\square$ получен как резольвента запроса и правила

Проблема 1, которую требуется решить, чтобы вывод стал входным: в выводе могут строиться «лишние» резольвенты и склейки, т.е. такие, которые никак не связаны с получением $\square$

Очистим вывод от таких резольвент, склеек и вариантов, не использующихся для получения $\square$

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_{\mathcal{Q}}\}$; $\quad S : \neg\Phi_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \Box$?

Проблема 2: в выводе может строиться резольвента запроса и правила, но не из S, а резольвенты двух правил:

$$\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, A) \qquad B'_1 \,\&\, \dots \,\&\, B'_m \,\&\, E \to A \qquad B''_1 \,\&\, \dots \,\&\, B''_n \to E$$

$$B'_1 \,\&\, \dots \,\&\, B'_m \,\&\, B''_1 \,\&\, \dots \,\&\, B''_n \to A$$

$$\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, B'_1 \,\&\, \dots \,\&\, B'_k \,\&\, B''_1 \,\&\, \dots \,\&\, B''_n)$$

Эту проблему можно решить, перестроив вывод:

$$\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, A) \qquad B'_1 \,\&\, \dots \,\&\, B'_m \,\&\, E \to A \qquad B''_1 \,\&\, \dots \,\&\, B''_n \to E$$

$$\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, B'_1 \,\&\, \dots \,\&\, B'_k \,\&\, E)$$

$$\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, B'_1 \,\&\, \dots \,\&\, B'_k \,\&\, B''_1 \,\&\, \dots \,\&\, B''_n)$$

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_{\mathcal{Q}}\}$; $\quad S : \neg\Phi_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \square$?

Проблема 3: в выводе может строиться резольвента запроса и правила, но не из S, а склейки другого правила:

$$\begin{tikzcd}
\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, A) \arrow[dd] & B_1 \,\&\, \dots \,\&\, B_k \,\&\, E \,\&\, E \to A \arrow[d] \\
& B_1 \,\&\, \dots \,\&\, B_k \,\&\, E \to A \arrow[dl] \\
\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, B_1 \,\&\, \dots \,\&\, B_k \,\&\, E) &
\end{tikzcd}$$

Эту проблему тоже можно решить, перестроив вывод:

$$\begin{tikzcd}
\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, A) \arrow[d] & B_1 \,\&\, \dots \,\&\, B_k \,\&\, E \,\&\, E \to A \arrow[dl] \\
\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, B_1 \,\&\, \dots \,\&\, B_k \,\&\, E \,\&\, E) \arrow[d] & \\
\neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, B_1 \,\&\, \dots \,\&\, B_k \,\&\, E) &
\end{tikzcd}$$

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_{\mathcal{Q}}\}$; $\quad S : \neg\Phi_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \Box$?

Проблема 4 (последняя): в выводе может строиться склейка запроса

Рассмотрим последнюю такую склейку:

$$\mathcal{Q}_1 = \neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, A \,\&\, A) \to \mathcal{Q}_2 = \neg(C_1 \,\&\, \dots \,\&\, C_m \,\&\, A) \xrightarrow{\mathcal{R}_2} \cdots \xrightarrow{\mathcal{R}_k} \Box$$

Из входного вывода $\Box$ из $\mathcal{Q}_2$ можно получить входной вывод $\mathfrak{D}'$ дизъюнкта $\Box$ из A, удалив

- изображённые атомы $C_1, \dots, C_m$,
- все атомы остальных запросов, получающиеся из них переписыванием без изменений или применением правила резолюции,
- все правила, применявшиеся ко всем этим атомам для получения резольвент и
- все дублирующиеся запросы

Применив к к $\mathcal{Q}_1$ правила, применявшиеся в $\mathfrak{D}'$, можно получить входной вывод $\mathcal{Q}_2$ из $\mathcal{Q}_1$ ▼

Лемма о подъёме вычисления

Для любых запроса $\mathcal{Q}$, ответа к ней θ, такого что $\mathcal{Q}\theta$ — основной запрос, и ХЛП $\mathcal{P}$ верно следующее: если для $[\mathcal{P}]$ существует успешное SLD-резолютивное вычисление, порождённое запросом $\mathcal{Q}\theta$, то для $\mathcal{P}$ существует успешное SLD-резолютивное вычисление, порождённое запросом $\mathcal{Q}$, результат которого — обобщение подстановки θ

Доказательство

Рассмотрим успешное SLD-резолютивное вычисление программы $[\mathcal{P}]$, порождённое запросом $\mathcal{Q}\theta$:

$$\mathcal{Q}_1^g \xrightarrow{\mathcal{R}_1^g, k_1, \varepsilon} \mathcal{Q}_2^g \xrightarrow{\mathcal{R}_2^g, k_2, \varepsilon} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n^g, k_n, \varepsilon} \square$$

Покажем, как по нему построить успешное SLD-резолютивное вычисление программы $\mathcal{P}$, порождённое запросом $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

Лемма о подъёме вычисления (доказательство)

$$\mathcal{Q}_1^g \xrightarrow{\mathcal{R}_1^g, k_1, \varepsilon} \mathcal{Q}_2^g \xrightarrow{\mathcal{R}_2^g, k_2, \varepsilon} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n^g, k_n, \varepsilon} \square$$

$$(\exists ?)\ \mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

Чтобы «поднять» один шаг вывода, воспользуемся леммой о подъёме для дизъюнктов и соответствием вычислений ХЛП и входных выводов

$\neg\Phi_{\mathcal{Q}_i^g}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i^g}$ — это основные примеры дизъюнктов $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_i}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i}$

$\neg\Phi_{\mathcal{Q}_{i+1}^g}$ — это резольвента дизъюнктов $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_i^g}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i^g}$

Значит, согласно лемме о подъёме и её доказательству, существуют

- резольвента $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_{i+1}}$ дизъюнктов $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_i}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i}$ с унификатором η_i,
- подстановка μ_i, такая что $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_{i+1}^g} = \neg\Phi_{\mathcal{Q}_{i+1}}\mu_i$ и $\mu_{i-1} = (\eta_i\mu_i)|_{\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}_i}}$ (для $\mu_0 = \theta$)

Последовательно применяя эти рассуждения к $i = 1, 2, \dots$, получим требуемое вычисление, а также соотношение $\theta = (\eta_1\eta_2\dots\eta_n)|_{\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}}}\mu$ для некоторой подстановки μ ▼

Теорема о полноте операционной семантики ХЛП

Для любых программы $\mathcal{P}$ и запроса $\mathcal{Q}$ любой правильный ответ на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$ является частным случаем хотя бы одного SLD-вычислимого ответа на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

Доказательство

Пусть $\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}\theta} = \{\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_k\}$

Выберем константы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$, не содержащиеся ни в $\mathcal{P}$, ни в $\mathcal{Q}$, ни в термах θ

Символом μ обозначим подстановку $\{\mathrm{Z}_1/\mathbf{c}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{k}/\mathbf{c}_k\}$

θ — правильный ответ, а значит, верно соотношение $\mathcal{P} \models \forall \widetilde{\mathrm{Z}}^\mathrm{k}\ (\mathcal{Q}\theta)$

Следовательно, верно и $\mathcal{P} \models \mathcal{Q}\theta\mu$

По лемме об основных вычислениях, для существует успешное SLD-резолютивное вычисление программы $[\mathcal{P}]$, порождённое запросом $\mathcal{Q}\theta\mu$

По лемме о подъёме вычисления, для существует успешное SLD-резолютивное вычисление программы $\mathcal{P}$, порождённое запросом $\mathcal{Q}$, и для результата η этого вычисления и некоторой подстановки ρ верно $\theta\mu = \eta\rho$

Теорема о полноте операционной семантики ХЛП

Доказательство

$\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}\theta} = \{\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_k\}$; $\mu = \{\mathrm{Z}_1/\mathbf{c}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{k}/\mathbf{c}_k\}$; η — SLD-вычислимый ответ; $\exists\rho : \theta\mu = \eta\rho$

Заме́ним константы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ на переменные $\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_k$ во всех термах в правых частях связок подстановок θ, μ, η и ρ

Так как константы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ не содержатся в $\mathcal{P}$ и в $\mathcal{Q}$, то они не содержатся и в подстановке η

Подстановка μ в результате такой замены заменится на ε

Значит, в результате такой замены равенство

$$\theta\mu = \eta\rho$$

преобразуется в

$$\theta = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ', то есть правильный ответ θ действительно является частным случаем некоторого SLD-вычислимого ответа η ▼