Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 20

Алгебра процессов
Базовая алгебра процессов (BPA)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Алгебра процессов

Все рассмотренные модели родственны автоматам и тесно связаны с ними и с автоматным подходом к моделированию информационных систем:

- Система в каждый момент времени находится в некотором состоянии (в некоторой конфигурации; имеет некоторую разметку; ...)
- Система начинает выполнение в одном из начальных состояний
- Состояния системы последовательно изменяются за счёт выполнения переходов

Алгебра процессов

Для задания (представления) таких вычислительных объектов можно использовать существенно разные подходы, и один из них — алгебраический, согласно которому

- задаются
  - «элементарные» объекты («простые» автоматы) и
  - операции преобразования объектов (конкатенация, объединение, пересечение, итерация, ...), и
- вычислительный объект представляется в виде способа построения его из элементарных при помощи операций

Например, в парадигме структурированного программирования программа представляет собой

- или элементарную команду (такую как присваивание),
- или составную программу заданного вида (последовательность, ветвление, цикл), построенную над другими структурированными программами, то есть результат применения соответствующей операции к подпрограммам

Алгебра процессов

Под процессом в широком смысле будем понимать пошагово вычисляющий объект, в процессе вычисления выполняющий некоторые действия (*как действия в размеченной системе переходов из курса, посвящённого формальной верификации*)

Алгеброй процессов принято называть систему понятий, предназначенную для формализации понятия процесса при помощи алгебраического подхода

Понятия алгебры процессов тесно переплетены с понятиями из области логических исчислений, и поэтому иногда алгебру процессов ещё называют исчислением процессов

Алгебра процессов

Первые варианты алгебры процессов предложили в конце 1970-х годов независимо

- Робин Милнер (Calculus of Communicating Systems, CCS) и
- Тони Хоар (Communicating Sequential Processes, CSP)

как систему математических понятий для описания параллельно выполняющихся взаимодействующих процессов при помощи имевшихся на тот момент математических средств (теории формальных языков, теории вычислений, алгебры и логики)

Затем в начале 1980-х годов Ян Бергстра и Ян Клоп предложили термин «алгебра процессов», общий алгебраический подход к формализации и анализу поведения системы взаимодействующих процессов и конкретное воплощение этого подхода (Algebra of Communicating Processes, ACP)

Все эти три варианта «здравствуют» и по сей день, предлагая немного разные, но в целом очень похожие системы понятий и методов

Базовая алгебра процессов

Начнём обсуждение алгебры процессов с фрагмента, предназначенного для описания одного (не взаимодействующего и не выполняющегося параллельно) процесса

Этот фрагмент имеет название

«базовая алгебра процессов»

(Basic Process Algebra, BPA)

Базовая алгебра процессов: синтаксис

Процессом над множеством действий $\mathcal{A}$ представляет собой запись (терм), задающуюся следующей формой Бэкуса-Наура (БНФ):

$$p \ ::= \ a \ \mid \ (p.p) \ \mid \ (p+p), \text{ где}$$

- p — процесс
- $a \in \mathcal{A}$
- $.$ — операция последовательной композиции
  - *Содержательно*, $p_1.p_2$ означает, что процесс выполняет сначала действия p_1, и затем — действия p_2
- $+$ — операция альтернативной композиции
  - *Содержательно*, $p_1 + p_2$ означает, что процесс выбирает один из наборов действий p_1, p_2 и выполняет его

Кроме того, будем считать процессом особый символ $\checkmark$ (*содержательно*, это успешно завершившийся процесс)

Процессы, отличные от $\checkmark$, будем называть незавершённым

Приоритеты и ассоциативность (вправо) операций $.$ и $+$ такие же, как у умножения и сложения чисел соответственно

$\mathcal{P}$ — так будем обозначать множество всех процессов

Базовая алгебра процессов: синтаксис

Пример

«Прилежный» пользователь кофейного автомата может получать напиток по следующей схеме:

- Опустить монету в щель для монет (действие мон
- Выбрав напиток (чай или кофе), нажать на соответствующую кнопку (действие чай нажатия на кнопку выдачи чая, кофе — на кнопку выдачи кофе)
- Взять стакан с напитком (действие взять)

Эту схему взаимодействия с автоматом можно записать как процесс

$$\text{мон}.(\text{чай} + \text{кофе}).\text{взять}$$

Если для кофе требуется бросить опустить в щель две монеты, то правильное взаимодействие с таким автоматом можно записать так:

$$(\text{мон}.\text{чай} + \text{мон}.\text{мон}.\text{кофе}).\text{взять}$$

Или так:

$$\text{мон}.(\text{чай} + \text{мон}.\text{кофе}).\text{взять}$$

Базовая алгебра процессов: семантика

Семантика процесса основывается на отношении переходов $\rightarrow \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}$, где $a \in \mathcal{A}$

Соотношение $(p, a, q) \in \rightarrow$ будем записывать в виде $p \xrightarrow{a} q$, и будем называть такую запись шагом вычисления процесса

Указанный шаг вычисления содержательно означает, что процесс, находящийся в состоянии p, способен (за один шаг вычисления) выполнить действие a и перейти в состояние q (преобразоваться в процесс q)

Базовая алгебра процессов: семантика

Отношение $\to$ зададим при помощи логических правил вывода, позволяющих выводить одни шаги вычисления, основываясь на других шагах вычисления

Правило вывода имеет вид $\dfrac{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}{\sigma}$, где $n \geq 0$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma$ — шаги вычисления

Указанное число n будем называть местностью правила

Если $n = 0$, то будем говорить, что σ выводится по этому правилу, а иначе — что σ выводится из $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ по этому правилу

Содержательная трактовка такой выводимости: если известно, что $\sigma_1, \ldots \sigma_n$ — шаги вычисления, то и σ также признаётся шагом вычисления

Базовая алгебра процессов: семантика

В следующих правилах $a \in \mathcal{A}$, $p, q, \widetilde{p}$ — незавершённые процессы и p', q' — процессы

Правило R_a:

$$\frac{}{a \xrightarrow{a} \checkmark}$$

Правила R_+:

$$\frac{p \xrightarrow{a} p'}{p + q \xrightarrow{a} p'} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} q'}{p + q \xrightarrow{a} q'}$$

Правило $R_.$:

$$\frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p.q \xrightarrow{a} \widetilde{p}.q}$$

Правило $R_{.\checkmark}$:

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p.q \xrightarrow{a} q}$$

Эту систему правил будем обозначать записью $\mathfrak{R}_{bpa}$

Базовая алгебра процессов: семантика

Выводом шага вычисления σ по правилам множества $\mathfrak{R}$ будем называть конечную последовательность шагов вычисления, оканчивающуся шагом σ и такую что каждый шаг σ_i

- выводится по 0-местному правилу из $\mathfrak{R}$ или
- выводится по n-местному правилу из $\mathfrak{R}$ $(n > 0)$ из каких-либо шагов, записанных в выводе строго раньше, чем σ_i

Шаг вычисления назовём выводимым по правилам $\mathfrak{R}$, если существует вывод этого шага из $\mathfrak{R}$

Например, все следующие шаги вычисления выводимы из $\mathfrak{R}_{bpa}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{b \xrightarrow{b} \checkmark}\;R_b}{a+b \xrightarrow{b} \checkmark}\;R_+}{(a+b).c \xrightarrow{b} c}\;R_{.\checkmark}}{((a+b).c).d \xrightarrow{b} c.d}\;R_{.}$$

Базовая алгебра процессов: семантика

Отношение шага вычисления зададим так:

$$p \xrightarrow{a} x \Leftrightarrow \text{этот шаг вычисления выводи́м по правилам } \mathfrak{R}_{bpa}$$

Вычислением процесса p назовём максимальную (непродолжаемую) последовательность

$$x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3 \xrightarrow{\cdots},$$

устроенную следующим образом:

1. $x_1 = p_1$
2. Если в последовательности есть хотя бы $(i+1)$ элемент, то $x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$ — шаг вычисления

Например, процесс $(\text{мон}.(\text{чай} + \text{мон}.\text{кофе}).\text{взять})$ имеет ровно два вычисления:

$$\text{мон}.(\text{чай} + \text{мон}.\text{кофе}).\text{взять} \xrightarrow{\text{мон}} (\text{чай} + \text{мон}.\text{кофе}).\text{взять} \xrightarrow{\text{чай}} \text{взять} \xrightarrow{\text{взять}} \checkmark$$

$$\text{мон}.(\text{чай} + \text{мон}.\text{кофе}).\text{взять} \xrightarrow{\text{мон}} (\text{чай} + \text{мон}.\text{кофе}).\text{взять} \xrightarrow{\text{мон}} \text{кофе}.\text{взять} \xrightarrow{\text{кофе}} \text{взять} \xrightarrow{\text{взять}} \checkmark$$

Базовая алгебра процессов: семантика

Для анализа поведения процесса все его шаги вычисления удобно записывать в виде графа

Процессным графом процесса p называется размеченный ориентированный граф следующего вида:

- Вершины графа — это все процессы и символ $\checkmark$, встречающиеся в вычислениях p
- Процесс p объявлен корнем графа
- Ду́ги, исходящие из вершины q графа — это в точности все шаги вычисления процесса, начинающиеся в q

Базовая алгебра процессов: семантика

Например, граф процесса (мон.(чай + мон.кофе).взять) устроен так: