Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 3

Сети Петри:
примеры применения
и свойства поведения

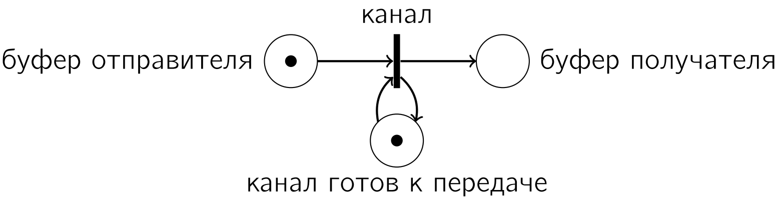
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Сети Петри находят своё применение во многих областях деятельности, как связанных с математикой и информатикой, так и нет

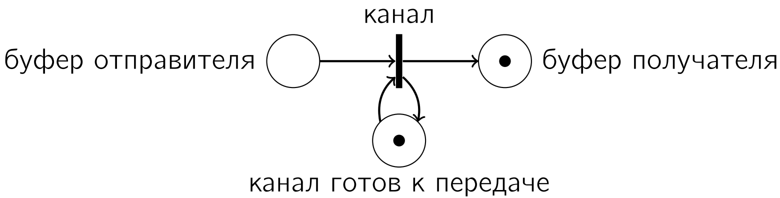
Из особенностей устройства сетей в этих областях естественным образом вытекают и некоторые задачи анализа поведения сетей

Пример применения: телекоммуникационные системы



Строго определим эти и смежные требования в терминах сетей Петри

Пример применения: телекоммуникационные системы



В правильном функционировании такой системы, в частности:

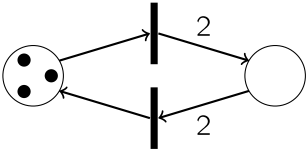
1. Буферы не переполняются
2. Сообщения не теряются, не дублируются и достигают адресата

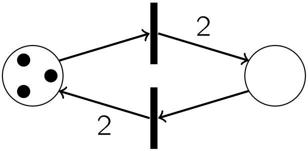
Строго определим эти и смежные требования в терминах сетей Петри

Позиция p в маркированной сети Петри π называется k-ограниченной, где $k \in \mathbb{N}_0$, если в p лежит не более k фишек в любой достижимой разметке, и просто ограниченной, если существует число k, для которого она k-ограниченна

Маркированная сеть Петри называется ограниченной, если все её позиции ограниченны

Примеры ограниченной сети (слева) и неограниченной (справа)





Утверждение. Маркированная сеть Петри π ограниченна $\Leftrightarrow$ множество $R(\pi)$ конечно

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если сеть содержит позиции $p_1, \ldots, p_k$ и для любой достижимой разметки в p_i лежит не более n_i фишек, $1 \leq i \leq k$, то $|R(\pi)| \leq (n_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$

($\Leftarrow$) Если $R(\pi) = \{M_1, \ldots, M_k\}$, то в любой позиции p относительно любой достижимой разметки лежит не более $\max(M_1(p), \ldots, M_k(p))$ фишек ▼

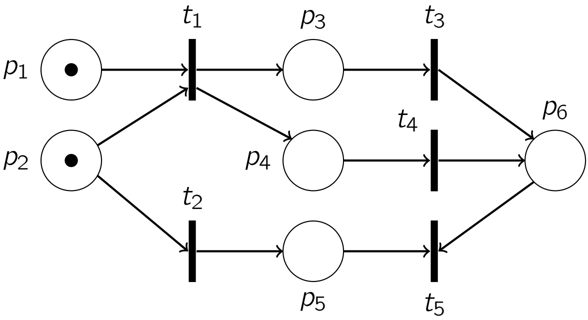
Позиция p в маркированной сети Петри называется безопасной, если она 1-ограниченна

Сеть Петри называется безопасной, если все её позиции безопасны

Сеть Петри называется ординарной, если веса всех её дуг равны 1

Очевидно, что задачу проверки безопасности разумно ставить только для ординарных сетей Петри

Пример небезопасной ординарной сети Петри

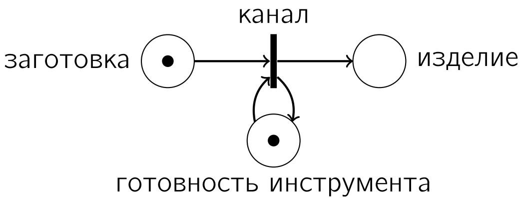


Сеть Петри $\pi = (P, T, E, W, M)$ называется консервативной, если для любой достижимой разметки K верно равенство $\sum\limits_{p \in P} M(p) = \sum\limits_{p \in P} K(p)$

Иными словами, сеть Петри консервативна, если суммарное число фишек во всех её позициях остаётся неизменным во всех вычислениях

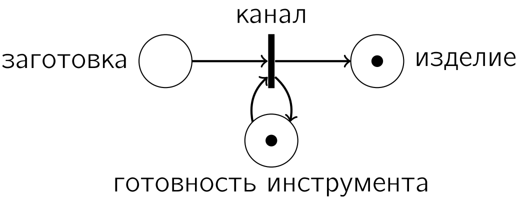
Можно легко убедиться в том, что сеть Петри $\pi = (P, T, E, W, M)$ является консервативной тогда и только тогда, когда для каждого перехода t, срабатывающего хотя бы в одном вычислении, верно равенство $E_W(\bullet, t) = E_W(t, \bullet)$

Пример применения: производственные процессы и бизнес-процессы



Строго определим эти и смежные требования в терминах сетей Петри

Пример применения: производственные процессы и бизнес-процессы



В правильном функционировании такой системы, в частности:

- Инструменты участвуют в рабочем цикле
- Рабочие не мешают друг другу

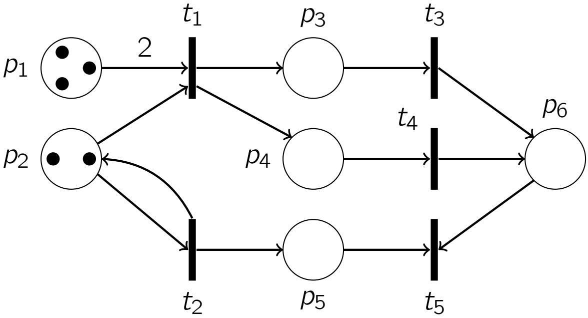
Строго определим эти и смежные требования в терминах сетей Петри

Переход t в маркированной сети Петри π называется живым, если для любой достижимой разметки M существует разметка M', такая что переход t активен в M'

Иными словами, переход t жив, если любое конечное вычисление можно продолжить так, чтобы этот переход далее сработал хотя бы раз

Сеть называется живой, если все её переходы живые

Пример: в следующей сети живым является переход t_2 и только он



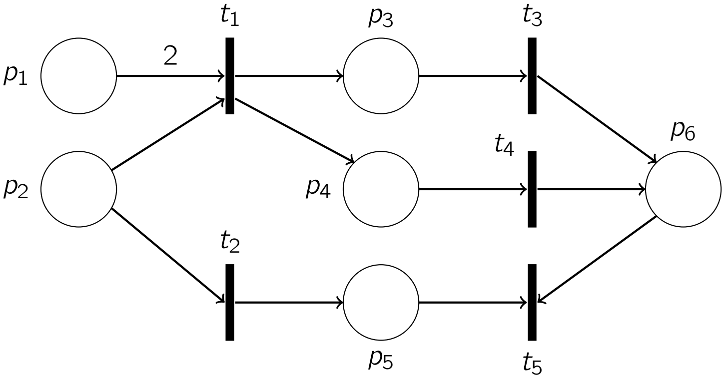
Переход t в сети Петри $\pi = (P, T, E, W, M)$ называется устойчивым (persistent), если для любой достижимой разметки M и любого перехода r, отличного от t, верно следующее:

если оба перехода t, t' активны в M, то $E_W(\bullet, t) + E_W(\bullet, r) \preceq M'$

Иными словами, переход устойчив, если он, будучи активным, не может деактивироваться (заблокироваться) из-за срабатывания других переходов

Маркированная сеть Петри устойчива, если все её переходы устойчивы

Пример: в сети, изображённой ниже, неустойчив переход t_1 и только он



Другие применения и осмысления элементов сетей Петри

позиция	$\to$	**переход**	$\to$	**позиция**
предусловие		событие		постусловие
входные данные		оператор		выходные данные
потребляемый ресурс		работа		производимый ресурс
предпосылка		правило		умозаключение

К проверке упомянутых свойств сетей (ограниченность, безопасность, живость, устойчивость) следует добавить ещё две ключевых задачи:

1. Проблема достижимости: для заданной маркированной сети Петри π и и заданной разметки M проверить достижимость M в π

2. Проблема R-эквивалентности: для заданной пары маркированных сетей Петри π_1, π_2 с одним и тем же множеством позиций проверить равенство $R(\pi_1) = R(\pi_2)$