

Распределённые алгоритмы

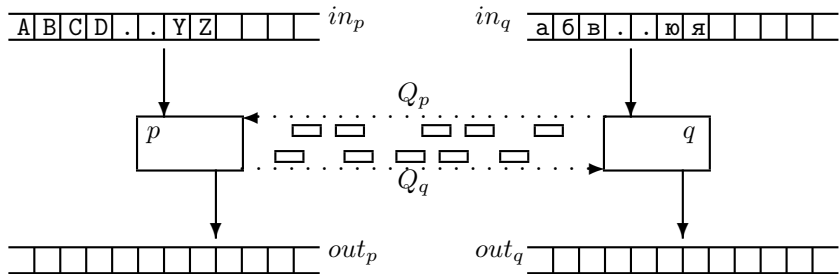
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 11

Живость
симметричного протокола раздвижного окна

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Напоминание



Живость BSWP для номера k , $k \in \mathbb{N}_0$:

в любом вычислении содержится конфигурация, в которой все значения $out_p[0], \dots, out_p[k], out_q[0], \dots, out_q[k]$ отличны от \perp

$$\forall \pi \in \Pi(S) : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \dots, k\} : out_p[i] \neq \perp \ \& \ out_q[i] \neq \perp$$

Напоминание

- ▶ $\ell_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- ▶ $r_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- ▶ $in_p : ARR[\mathcal{T}]$
- ▶ $out_p : ARR[\mathcal{T}] = (\perp, \perp, \perp, \dots)$;

Действие S_p : $\{\ell_p < r_p + c_p\}$

1. Выбрать $i \in \mathbb{N}_0$: $\ell_p \leq i < r_p + c_p$
2. $send(\mathbf{pack}, in_p[i], i)$

Действие R_p : $\{\text{очередь } Q_p \text{ не пуста}\}$

1. $receive(\mathbf{pack}, w, i)$
2. Если $out_p[i] = \perp$:
 - 2.1 $out_p[i] := w$;
 - 2.2 $\ell_p := \max(\ell_p, i - c_q + 1)$;
 - 2.3 $r_p := \min(j \mid out_p[j] = \perp)$;

Действие L_p $\{\text{очередь } Q_p \text{ не пуста}\}$

1. $receive(\mathbf{pack}, w, i)$

К сожалению, если не наложить на устройство и выполнения BSWP дополнительных ограничений, то он не будет обладать свойством живости

Ограничения на устройство протокола:

- ▶ Все элементы in_p и in_q отличны от \perp
- ▶ $c_p, c_q \in \mathbb{N}_0$ и $c_p + c_q > 0$

Ограничения справедливости:

- F1 Если бесконечно часто возникает возможность отправки пакета, то этот пакет будет отправляться бесконечно часто
- F2 Если пакет отправляется бесконечно часто, то он и принимается бесконечно часто

BSWP с этими ограничениями будем обозначать **BSWP***

Оказывается, что этих ограничений достаточно для обеспечения живости протокола

Лемма (об узости окна). В любой достижимой конфигурации BSWP* верно:

$$r_p - c_q \leq l_p \leq r_q \leq l_q + c_p \leq r_p + c_p$$

Доказательство.

По теореме о безопасности инварианта, любая достижимая конфигурация BSWP* обладает свойством P_{BSWP}

Неравенство $r_p - c_q \leq l_p$ следует из

- ▶ p^0 : $\forall i \in \{0, 1, \dots, s_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$
- ▶ p^2 : $\forall i \in \mathbb{N}_0 : out_p[i] \neq \perp \Rightarrow out_p[i] = in_q[i] \ \& \ (l_p > i - c_q)$

Неравенство $l_p \leq r_q$ — это p^3

Неравенство $r_q \leq l_q + c_p$ (то есть $r_q - c_p \leq l_q$) следует из q^0 и q^2

Неравенство $l_q + c_p \leq r_p + c_p$ (то есть $l_q \leq r_p$) — это q^3 ▼

Таким образом, значения r_q и $l_q + c_p$, задающие створки окна узла q отстоят друг от друга не более чем на $c_p + c_q$ (и аналогично для p)

Лемма (об открытости окна). В любой достижимой конфигурации BSWP* выполнено хотя бы одно из предусловий действий отправки пакета S_p ($l_p < r_p + c_p$), S_q ($l_q < r_q + c_q$)

Доказательство.

По лемме об узости окна, верны неравенства

$$r_p - c_q \leq l_p \leq r_q \leq l_q + c_p \leq r_p + c_p$$

В частности, это означает, что $l_p \leq r_q$ и $l_q + c_p \leq r_p + c_p$

То есть $l_p \leq r_q$ и $l_q \leq r_p$

Кроме того, согласно ограничению $c_p + c_q > 0$, верно $r_p - c_q < r_p + c_p$

Следовательно, хотя бы одно из неравенств леммы об узости окна является строгим

Последнее означает, в частности, что $r_p - c_q < r_q \vee r_q < r_p + c_p$

То есть $r_p < r_q + c_q \vee r_q < r_p + c_p$

Следовательно, верно $l_p \leq r_q < r_p + c_p \vee l_q \leq r_p < r_q + c_q$ ▼

Теорема (живость BSWP). С.п. S BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP

$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \dots, k\} : out_p[i] \neq \perp \ \& \ out_q \neq \perp$

Доказательство.

Согласно p^0 ($\forall i \in \{0, 1, \dots, r_p - 1\} : out_p[i] \neq \perp$), q^0 ($\forall i \in \{0, 1, \dots, r_q - 1\} : out_q[i] \neq \perp$) и безопасности BSWP, достаточно показать, что каждое из значений r_p, r_q увеличивается бесконечно часто

Предположим от противного, что это не так

По лемме об узости окна, верны неравенства $r_p - c_q \leq r_q \leq r_p + c_p$ и $r_q - c_p \leq r_p \leq r_q + c_q$, а значит, значения обеих переменных r_p, r_q увеличиваются лишь конечное число раз

Пусть k_p, k_q — наибольшие значения r_p и r_q соответственно

Теорема (живость BSWP). С.п. S BSWP* в условиях справедливости (F1) и (F2) обладает свойством живости BSWP
 $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \pi \in \Pi(S) : \exists \sigma \in \pi : \forall i \in \{0, 1, \dots, k\} : out_p[i] \neq \perp \ \& \ out_q \neq \perp$

Доказательство.

По **лемме об открытости окна**, бесконечно часто допустимо действие отправления хотя бы одного из пакетов **(pack, $in_p[k_q], k_q$)**,
(pack, $in_q[k_p], k_p$)

Пусть, для ясности, это пакет **(pack, $in_q[k_p], k_p$)**

Согласно (F1), этот пакет отправляется бесконечно часто

Согласно (F2), этот пакет принимается бесконечно часто

По устройству протокола и ограничению $in_q[k_p] \neq \perp$, приём этого сообщения приводит к увеличению значения r_p (**противоречие**) ▼

Д.з. 1. Покажите, что последняя теорема перестаёт быть верной, если убрать хотя бы одно из ограничений (F1), (F2), и для этого приведите соответствующие «неживые» сценарии выполнения протокола

Д.з. 2. Докажите, что если в BSWP* выполняется равенство $c_p + c_q = 1$ и начальные значения l_p и l_q заменить соответственно на $-c_q$ и $-c_p$, то во всех достижимых конфигурациях будут выполняться равенства $l_p + c_q = r_p$ и $l_q + c_p = r_q$