ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ
экзаменационной работы по курсу
“Избранные вопросы дискретной математики”

Задача 1 (3 балла). При помощи производящих функций доказать комбинаторное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Задача 2 (3 балла). Решить линейное неоднородное рекуррентное уравнение

$$x_{n+3} + x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = 5 \cdot 2^{n-1};\ x_1 = 1;\ x_2 = 16;\ x_3 = -16.$$

Задача 3 (3 балла). Найти цикловой индекс группы вращений квадрата в плоскости. По теореме Пойа найти число ожерелий из 4-х бусин красного, синего и зеленого цветов, в которых не менее 2-х бусин синего цвета. Два ожерелья различны, если одно из них не может быть получено из другого поворотом в плоскости.

Задача 4 (3 балла). Является ли фактор-кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^2 + 1)$ полем? Ответ обосновать. Найти сумму и произведение элементов $[x^3 + 1]$ и $[x^2 + x]$ в этом кольце.

Задача 5 (3 балла). Представима ли функция $f(x) = 2j_0(x) + 2j_1(x) \in P_4$ полиномом по модулю 4. Ответ обосновать.

Вопрос 6 (3 балла). Сформулировать теорему Анселя. Разбить куб B^3 на цепи Анселя.

Вопрос 7 (3 балла). Сформулировать лемму Бернсайда. Перечислить орбиты вершин правильного шестиугольника при его вращениях в плоскости на угол, кратный $\frac{2\pi}{3}$.

Вопрос 8 (3 балла). Сформулировать теорему о делении с остатком в кольце многочленов над полем. Поделить с остатком многочлен $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + x \in \mathbb{F}_7[x]$ на многочлен $g(x) = x^2 + 5 \in \mathbb{F}_7[x]$.

Вопрос 9 (3 балла). Сформулировать теорему о представлении функций k-значной логики в I-й форме. Представить в I-й форме функцию $f(x) = \sim (x^2) \in P_5$.

Вопрос 10 (3 балла). Дать определение покрытия 0-1-матрицы. Построить 0-1-матрицу (без нулевых и повторяющихся столбцов) из 4-х строк и 4-х столбцов, в которой нет покрытий из 2-х строк, но есть покрытия из 3-х строк.

Задание 11 (3 балла). Доказать, что последовательность $n\lambda^n$ является частным решением линейного однородного рекуррентного уравнения $x_{n+k} + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j} x_{n+k-j} = 0$, если λ – это корень характеристического многочлена этого ЛОРУ, причем кратность корня равна 2.

Задание 12 (3 балла). Доказать, что если $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ – приводим над полем $\mathbb{F}_p$ (p – простое число) и многочлен $g(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, $1 < deg\ g < deg\ f$, делит мночлен $f(x)$, то для элемента $[g]$ нет обратного элемента в фактор-кольце $\mathbb{F}_p[x]/(f)$.

Задание 13 (3 балла). Доказать, что функция $j_0(x) \in P_k$ не задается полиномом по модулю k, если k – составное число.

Задание 14 (4 балла). Расстоянием $dist(\alpha, \beta)$ между наборами $\alpha \in B^n$ и $\beta \in B^n$ называется число координат, в которых эти наборы отличаются. Сферой радиуса r с центром в точке $\alpha \in B^n$ называется множество $S_r(\alpha) = \{\beta \in B^n \mid dist(\alpha, \beta) = r\}$. Найти нижнюю мощностную оценку числа сфер радиуса 1, покрывающих куб B^n. Найти верхнюю оценку мощности градиентного покрытия куба B^n сферами радиуса 1.

Решения

Задача 1. Рассмотрим производящую функцию $F(t)$ для последовательности биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = (t+1)^n.$$

Тогда

$$F(t) \cdot F(t) = (t+1)^n \cdot (t+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l t^l\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{k+l=m} C_n^k \cdot C_n^l\right) t^m = (t+1)^{2n} = \sum_{m=0}^{2m} C_{2n}^m t^m.$$

Приравнивая коэффициенты при одночлене t^n в полученных многочленах для $(t+1)^{2n}$, находим

$$\sum_{k+l=n} C_n^k \cdot C_n^l = C_{2n}^n.$$

Но $C_n^k = C_n^{n-k}$, поэтому

$$\sum_{k+l=n} C_n^k \cdot C_n^l = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Задача 2. Запишем характеристический многочлен соответствующего ЛОРУ и найдем его корни:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0;\ x = 1,\ x = 1,\ x = -3.$$

Поэтому общее решение соответствующего ЛОРУ имеет вид $(C_1 n + C_0) + C(-3)^n$, где C_0, C_1, C – произольные комплексные числа.

Найдем частное решение ЛНРУ. Т.к. 2 не является корнем соответствующего ЛОРУ, частное решение ищем в виде $c2^n$, $c \in \mathbb{C}$:

$$c2^{n+3} + c2^{n+2} - 5c2^{n+1} + 3c2^n = 5 \cdot 2^{n-1};\ c = \frac{1}{2}.$$

Значит, общее решение ЛНРУ имеет вид $(C_1 n + C_0) + C(-3)^n + 2^{n-1}$.

Для нахождения коэффициентов C_0, C_1, C воспользуемя начальными условиями. Получим систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_0 - 3C + 1 = 1, \\ 2C_1 + C_0 + 9C + 2 = 16, \\ 3C_1 + C_0 - 27C + 4 = -16. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $C_1 = 2, C_0 = 1, C = 1$. Решением ЛНРУ является последовательность $2n + 1 + (-3)^n + 2^{n-1}$.

Задача 3. Обозначим вершины квадрата (последовательно по часовой стрелке) числами $1, 2, 3, 4$. При вращениях квадрата в плоскости вершины переходят в вершины по следующим правилам:

1) при отсутствии вращения – тождественной перестановкой, содержащей 4 цикла длины 1;

2) при поворотах на угол $\frac{\pi}{2}$ по и против часовой стрелки – перестановками, содержащими один цикл длины 4;

3) при повороте на угол π – перестановкой, содержащей 2 цикла длины 2.

Других вращений нет. Получаем цикловой индекс вращений квадрата в плоскости:

$$Z_G(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1^4 + t_2^2 + 2t_4).$$

Введем функцию весов цветов: $w(\text{красный}) = w(\text{зеленый}) = 0$, $w(\text{синий}) = 1$. Тогда перечисляющий ряд для фигур имеет вид $Q(t) = 2 + t$.

Если ожерелье имеет не менее 2-х бусин синего цвета, то вес этого ожерелья не менее двух. Перечисляющий ряд для конфигураций имеет вид $\Phi(t) = \sum\limits_{j=0}^{4} \varphi_j t^j$, где φ_j – число ожерелий веса j. По условию задачи нам нужно найти $\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$.

По теореме Пойа $\Phi(t) = Z_G(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4))$. Получаем

$$\Phi(t) = \frac{1}{4}((2 + t)^4 + (2 + t^2)^2 + 2(2 + t^4)).$$

Нам нужно найти коэффициенты при t^4, t^3 и t^2:

$$\Phi(t) = \frac{1}{4}((1 + 1 + 2)t^4 + (4 \cdot 2 + 0 + 0)t^3 + (6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 0)t^2 + \ldots).$$

Получаем $\varphi_4 = 1$, $\varphi_3 = 2$, $\varphi_2 = 7$. Поэтому таких ожерелий 10.

Задача 4. Многочлен степени 4 неприводим над некоторым полем, если он не имеет корней в этом поле и не раскладывается в произведение многочленов второй степени. Проверим, есть ли корни в поле $\mathbb{F}_2$ у многочлена $f(x) = x^4 + x^2 + 1$:

$$f(0) = 1;\ f(1) = 1.$$

Корней нет. Представим многочлен $f(x)$ в виде произведения многочленов второй степени с неизвестными коэффициентами $a, b, c, d \in \mathbb{F}_2$:

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Получаем систему над полем $\mathbb{F}_2$:

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ b + ac + d = 1, \\ ad + bc = 0, \\ bd = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a = b = c = d = 1$. Система совместна,

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1),$$

а значит, многочлен $f(x)$ не является неприводимым над полем $\mathbb{F}_2$, и фактор-кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^2 + 1)$ не является полем.

Найдем сумму и произведение элементов $[x^3 + 1]$ и $[x^2 + x]$ в кольце $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^2 + 1)$:

$$[x^3 + 1] + [x^2 + x] = [x^3 + x^2 + x + 1];$$
$$[x^3 + 1] \cdot [x^2 + x] = [x^5 + x^4 + x^2 + x] = [(x + 1)(x^4 + x^2 + 1) + (x^3 + 1)] = [x^3 + 1].$$

Задача 5. Запишем таблицу значений функции $f(x) = 2j_0(x) + 2j_1(x) \in P_4$:

x	$f(x)$
0	2
1	2
2	0
3	0

Найдем значения степеней переменной x по модулю 4:

x	x^2	x^3	x^4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	1

Мы видим, что $x^4 = x^2 (\mathrm{mod}\ 4)$. Поэтому если функция $f(x)$ представима полиномом по модулю 4, то

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

для некоторых коэффициентов $a, b, c, d \in E_4$. Подставив значения $x = 0, 1, 2, 3$ в полученное равенство, находим систему для коэффициентов $a, b, c, d \in E_4$:

$$\begin{cases} d = 2, \\ a + b + c + d = 2, \\ 2c + d = 0, \\ 3a + b + 3c + d = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему в кольце вычетов по модулю 4. Система совместна, и $a = 0, b = 3, c = 1, d = 2$ – одно из ее решений. Значит, функция $f(x)$ представима полиномом по модулю 4, и $3x^2 + x + 2$ – один из ее полиномов.

Вопрос 6. Формулировку теоремы см. в лекциях. Куб B^3 разбивается на 3 следующие цепи:

$$C_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\},$$
$$C_2 = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\},$$
$$C_3 = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}.$$

Вопрос 7. Формулировку леммы см. в лекциях. Обозначим вершины правильного шестиугольника последовательно по часовой стрелке числами $1, 2, 3, 4, 5, 6$. При вращении этого шестиугольника на угол, кратный $\frac{2\pi}{3}$, вершина 1 может перейти в вершину 1 (при отсутствии поворота), в вершину 3 (при повороте на угол $\frac{2\pi}{3}$ по часовой стрелке) или в вершину 5 (при повороте на угол $\frac{4\pi}{3}$ по часовой стрелке). Совершенно аналогично, вершина 2 может перейти в вершину 2 (при отсутствии поворота), в вершину 4 (при повороте на угол $\frac{2\pi}{3}$ по часовой стрелке) или в вершину 6 (при повороте на угол $\frac{4\pi}{3}$ по часовой стрелке). Значит, есть всего 2 орбиты вершин при указанных вращениях шестиугольника:

$$O_1 = O_3 = O_5 = \{1, 3, 5\},$$
$$O_2 = O_4 = O_6 = \{2, 4, 6\}.$$

Вопрос 8. Формулировку теоремы см. в лекциях.

$$5x^4 + 3x^3 + x = (x^2 + 5)(5x^2 + 3x + 3) + 6.$$

Вопрос 9. Формулировку теоремы см. в лекциях. Запишем таблицу значений функции $f(x) = \sim (x^2) \in P_5$:

x	x^2	$f(x)$
0	0	4
1	1	3
2	4	0
3	4	0
4	1	3

Поэтому

$$f(x) = \max(\min(J_0(x), 4), \min(J_1(x), 3), \min(J_2(x), 0), \min(J_3(x), 0), \min(J_4(x), 3)) =$$
$$= \max(J_0(x), \min(J_1(x), 3), \min(J_4(x), 3)).$$

Вопрос 10. Определение см. в лекциях. Например, такая 0-1-матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 11. Доказательство см. в лекциях.

Задание 12. Доказательство см. в лекциях.

Задание 13. Доказательство см. в лекциях.

Задание 14. Каждая сфера радиуса 1 содержит n наборов. Всего в кубе B^n 2^n наборов. Поэтому менее, чем $\frac{2^n}{n}$ сферами, куб B^n не покрыть. Это и есть нижняя мощностная оценка.

Для нахождения верхней оценки мощности градиентного покрытия построим 0-1-матрицу с 2^n строками и 2^n столбцами. Строки и столбцы этой матрицы помечаем различными наборами куба B^n. На пересечении строки, помеченной набором $\alpha \in B^n$, и столбца, помеченного набором $\beta \in B^n$, находится 1 в том и только в том случае, когда набор β принадлежит сфере с центром в точке α. Заметим, что в каждом столбце будет ровно n единиц.

Воспользуемся леммой о градиентном покрытиии. В нашем случае:

$p = q = 2^n$ – в матрице 2^n строк и 2^n столбцов;

$t = n$ – в каждом столбце не менее n единиц.

По лемме получаем верхнюю оценку мощности градиентного покрытия Γ:

$$|\Gamma| \leq 1 + \frac{p}{t} \ln \left(e \frac{qt}{p} \right) = 1 + \frac{2^n}{n} \ln \left(e \frac{2^n n}{2^n} \right) = 1 + \frac{2^n}{n} \ln(en).$$