# Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

Блок 33

Избрание лидера:
алгоритм Галладжера-Хамблета-Спиры (GHS)

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

# Выборы и построение остовного дерева

Алгоритмы избрания лидера тесно связаны с алгоритмами построения остовного дерева

Пусть $C_E$ и $C_T$ — коммуникационные сложности задачи избрания лидера и построения остовного дерева соответственно

Для избрания лидера в произвольной сети можно построить её остовное дерево и избрать лидера в дереве со сложностью $O(|V|)$: $C_E \leq C_T + O(|V|)$

Построить остовное дерево, имея выделенную вершину (лидера), можно с помощью алгоритма эха со сложностью $2|E|$: $C_T \leq C_E + 2|E|$

Известно, что алгоритм избрания лидера в произвольной топологии $(V, E)$ имеет коммуникационную сложность $\Omega(|V| \log |V| + |E|)$

Значит, для избрания лидера с лучшей сложностью $O(|V| \log |V| + |E|)$ необходимо и достаточно научиться строить дерево с этой сложностью

Алгоритм Галладжера-Хамблета-Спиры (GHS) — это распределённый алгоритм построения остовного дерева, имеющий коммуникационную сложность $O(|V| \log |V| + |E|)$ в худшем случае

# Допущения

В GHS используются следующие допущения и соглашения:

1. $\Gamma = (V, E)$ — неориентированный связный граф топологии

2. Каждому ребру $e$ из $E$ приписан вес $\omega(e)$ — число ($\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$)

   Разным рёбрам приписаны разные веса

3. Каждый узел $p$ знает веса инцидентных ему каналов и множество смежных узлов ($Neigh_p$)

4. Все узлы являются инициаторами

   То есть системы переходов узлов одинаковы (*с поправкой на начальные знания*), и все узлы начинают выполнять действия, не дожидаясь приёма сообщения

# Минимальные остовные деревья

Весом графа назовём сумму весов рёбер этого графа

Минимальное остовное дерево (*MST*) — это остовное дерево, имеющее наименьший вес среди всех всех остовных деревьев

**Утверждение 1. Если все веса рёбер графа попарно различны, то существует единственное MST этого графа**

Доказательство.

*Предположим от противного*, что существуют два различных MST: $T_1 = (V, E_1)$ и $T_2 = (V, E_2)$

Рассмотрим ребро $e$ наименьшего веса, содержащееся в одном из этих деревьев и не содержащееся в другом

*Без ограничения общности* положим, что $e \in E_1$ и $e \notin E_2$

Тогда в графе $T_2' = (V, E_2 \cup \{e\})$ содержится цикл $\mathcal{C}$

Так как в $T_1$ нет циклов, то в $\mathcal{C}$ содержится ребро $e'$, не содержащееся в $T_1$

По выбору ребра $e$, верно $\omega(e) < \omega(e')$

Значит, $(V, (E_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ — дерево, имеющее меньший вес, чем $T_2$ (*противоречие*) ▼

# Минимальные остовные деревья

Фрагментами будем называть поддеревья MST

Ребро $e$ будем называть внутренним ребром фрагмента $F$, если обе его вершины принадлежат $F$, внешним, если обе не принадлежат, и граничным, если одна принадлежит и одна не принадлежит

Минимальным граничным ребром фрагмента будем называть граничное ребро этого фрагмента, имеющее наименьший вес среди всех граничных рёбер этого фрагмента

**Утверждение 2 (Задача 1).** **Если $F = (V_F, E_F)$ — фрагмент и $e = (v, w)$ — минимальное граничное ребро фрагмента $F$, то $(V_F \cup \{v, w\}, E_F \cup \{e\})$ — фрагмент**

# GHS: общее описание

Каждый узел $p$ на каждом этапе выполнения алгоритма принадлежит некоторому фрагменту, вычисленному алгоритмом (текущему фрагменту)

В начале выполнения узел $p$ принадлежит фрагменту $(\{p\}, \emptyset)$

Непересекающиеся фрагменты $(V_1, E_1)$ и $(V_2, E_2)$ при выполнении алгоритма могут быть объединены по ребру $e$, граничному для этих фрагментов, и результат такого объединения — фрагмент $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e\})$

Каждому фрагменту присваивается особое число — ранг

Фрагмент большего ранга (по сравнению с заданным) будем называть старшим, меньшего — младшим, равного — ровесником

Фрагмент вида $(\{p\}, \emptyset)$ имеет ранг 0

Ранг объединения фрагментов $F_1$ и $F_2$ с рангами $r_1$ и $r_2$ равен

- рангу старшего фрагмента, если $r_1 \neq r_2$
- $r_1 + 1$, если $r_1 = r_2$

# GHS: общее описание

Каждому фрагменту с хотя бы одним ребром присваивается имя

Каждый узел знает имя своего текущего фрагмента

Объединению фрагментов разных рангов присваивается имя старшего фрагмента

Имя объединения ровесников — это вес соединяющего их ребра

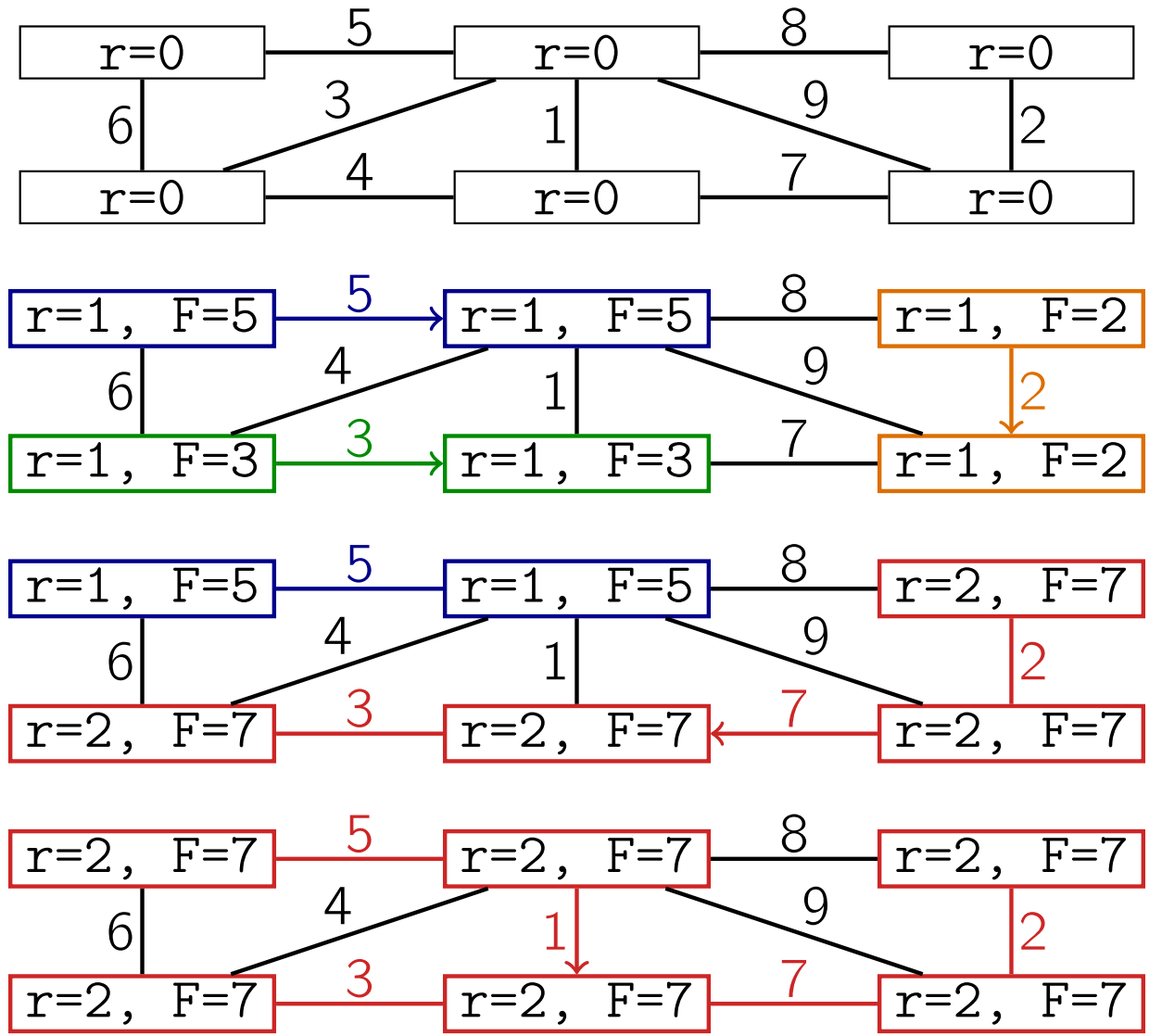
Ребро, вес которого является именем фрагмента, будем называть стержнем, и узлы стержня будем называть стержневыми

Так как веса всех рёбер попарно различны, то имена различных фрагментов различны, и проверка граничности ребра равносильна проверке неравенства имён узлов этого ребра

После объединения фрагментов ранг и имя рассылаются всем узлам фрагмента в направлении от стержня

# GHS: общее описание

**Пример** построения MST из фрагментов (r — ранг, F — имя):



# GHS: общее описание

**Утверждение 3.** **В любом фрагменте любого ранга $r \in \mathbb{N}_0$ содержится не менее $2^r$ узлов**

Доказательство (индукцией по способам объединения фрагментов).

В каждом фрагменте ранга 0 содержится ровно $2^0 = 1$ узел

Если объединяются фрагменты разных рангов, старший $F$ имеет ранг $r$ и содержит не менее $2^r$ узлов, то ранг объединения равен $r$, и в объединении содержатся по крайней мере все узлы $F$, и их не менее $2^r$

Если объединяются фрагменты одного ранга $r$ и каждый содержит не менее $2^r$ узлов, то объединение имеет ранг $(r + 1)$ и содержит не менее $(2^r + 2^r) = 2^{r+1}$ узел ▼

# GHS: общее описание

**Утверждение 4.** **При описанном построении MST значение ранга в каждом узле изменяется не более $\log_2 |V|$ раз**

Доказательство.

По утверждению 3, значение ранга фрагмента не может быть больше $\log_2 |V|$

При изменении ранга в узле он увеличивается хотя бы на 1

Значит, изменение может произойти не более $\log_2 |V|$ раз ▼

**Следствие.** **Суммарное число изменений рангов в узлах сети не превосходит $|V| \log_2 |V|$**

# GHS: правила присоединения фрагмента

Объединение фрагментов в GHS носит «полуодносторонний» характер: либо младший фрагмент присоединяется к старшему фрагменту, либо каждый из ровесников присоединяется к другому ровеснику

Такое присоединение фрагмента $F$ с именем $name_F$ и рангом $r_F$ согласно наименьшему граничному ребру $e_F$ фрагмента $F$ подчиняется двум правилам

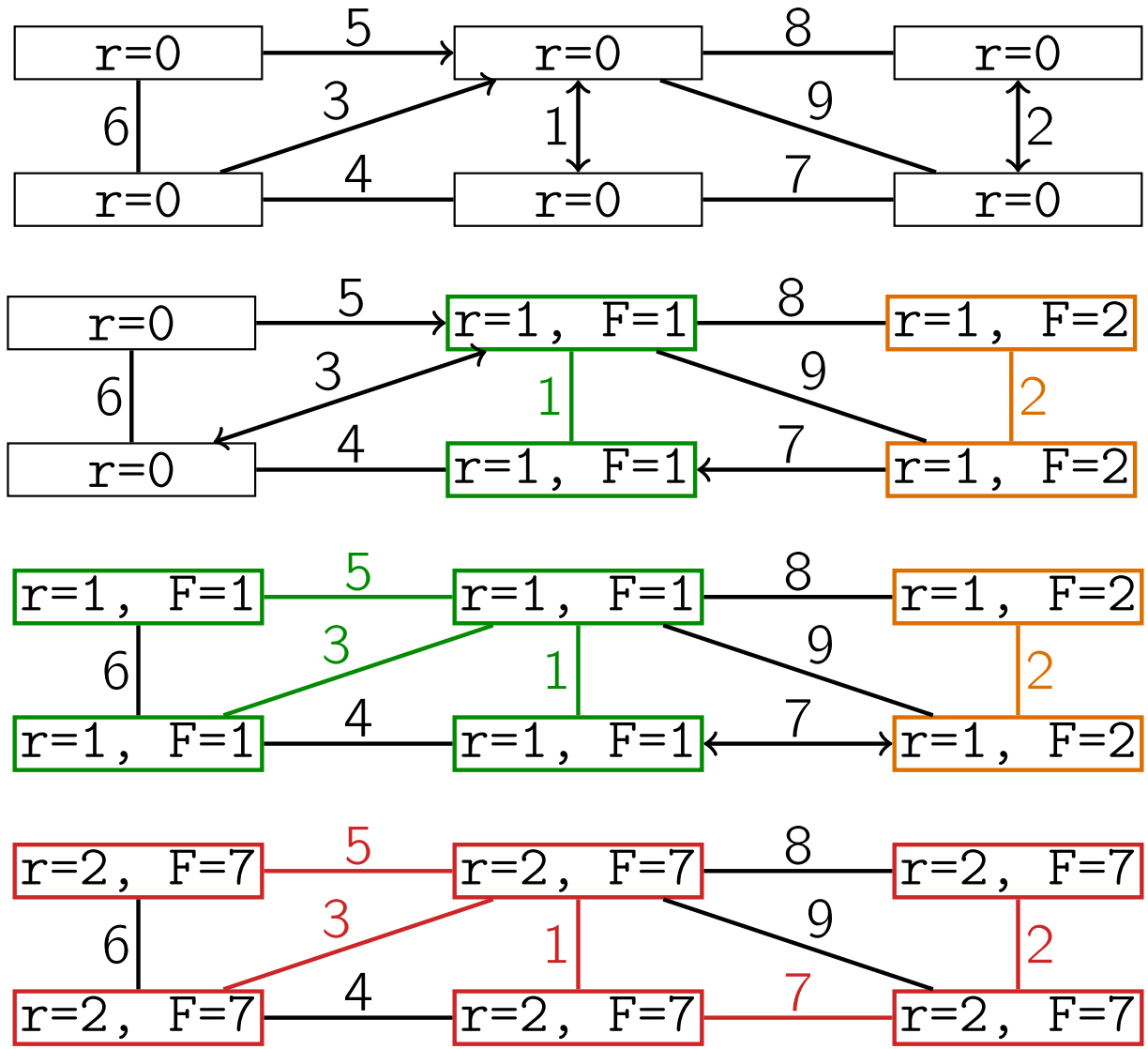
**Правило A.** Если $e_F$ соединяет $F$ с фрагментом $F'$ большего ранга, то узлы $F$ присоединяются к фрагменту $F'$: изменяют свои имя и ранг на имя и ранг $F'$

**Правило B.** Если $e_F$ соединяет $F$ с фрагментом $F'$ того же ранга и является минимальным граничным ребром фрагмента $F'$, то $F$ присоединяется к фрагменту $F'$ (и $F'$ присоединяется к фрагменту $F$)

В остальных случаях $F$ ожидает возможности применения правила A или B

# GHS: правила присоединения фрагмента

**Пример** объединения фрагментов в GHS по правилам A, B



# GHS: переменные узла $p$

- $state_p : \{find, found\} = found$ — режим работы узла
  - *find* означает поиск минимального граничного ребра
  - *found* означает, что минимальное граничное ребро найдено
- $ch\_stat_p[q] : \{basic, branch, reject\} = basic$ для каждого $q \in Neigh_p$ — статус канала связи
  - *branch* означает, что канал $p - q$ входит в MST
  - *reject* означает, что канал не входит в MST
  - *basic* означает, что принадлежность канала MST неясна
- $name_p = \perp$ — имя текущего фрагмента
- $best\omega_p = \perp$ — вес наилучшего известного узлу граничного ребра
- $rank_p = 0$ — ранг узла
- $parent_p = \perp$ — сосед в направлении стержня фрагмента (родитель)
- $test\_ch_p = \perp, best\_ch_p = \perp$ — вероятные направления к минимальному граничному ребру
- $N\_ch_p = 0$ — счётчик исследованных каналов

# GHS: виды сообщений

- (**connect**, *rank*) — отправляется в минимальное граничное ребро для обозначения готовности фрагмента присоединиться
- (**initiate**, (*rank*, *name*, *state*)) — принимается по минимальному граничному ребру для присоединения и пересылается узлам фрагмента
- (**test**, (*rank*, *name*)) — отправляется в ребро типа *basic* наименьшего веса, инцидентному узлу, для поиска минимального граничного ребра
- **reject** — отправляется в ответ на **test** во внутреннее ребро
- **accept** — отправляется в ответ на **test** в граничное ребро
- (**report**, *bestw*) — отправляется по направлению к стержню с наименьшим обнаруженным весом граничного ребра
- **changeroot** — принимается из канала, показывающего направление к стержню

# GHS: инициализация узла $p$

Первое однократно выполняющееся действие каждого узла:

1. $q = \underset{q \in Neigh_p}{\text{Argmin}}\, \omega_{(p,q)}$
2. $ch\_stat_p[q] := branch$;
3. $send(\textbf{connect}, 0) \to q$

---

Узел в тривиальном фрагменте ранга 0 очевидным образом находит минимальное граничное ребро и объявляет о готовности присоединиться по этому ребру

# GHS: приём connect узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение (**connect**, *rank*), где $rank \leq rank_p$, и если $rank = rank_p$, то $ch\_stat_p[q] \neq basic$ (*т.е. можно применить правило A или B*)

1. *receive*(**connect**, *rank*) $\leftarrow q$ для сообщения и соседа, упомянутых в предусловии
2. Если $rank < rank_p$ (*правило A*):
   - 2.1 $ch\_stat_p[q] := branch$;
   - 2.2 $send(\textbf{initiate}, (rank_p, name_p, state_p)) \rightarrow q$
3. Иначе (*правило B*): $send(\textbf{initiate}, (rank_p + 1, \omega_{(p,q)}, find))$

---

Узлу $q$ отправляется приказ присоединиться, если он

- младший или
- ровесник, и при этом узел $p$ уверен, что $(p, q)$ — минимальное граничное ребро его текущего фрагмента

Вопрос: а что происходит с сообщением, если у него бóльший ранг, либо равный, но канал не типа basic?

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $receive(\textbf{initiate}, (rank, name, state)) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p) := (rank, name, state)$;
3. $parent_p := q$;
4. $(best\omega_p, best\_ch_p) := (\infty, \perp)$;
5. Для всех $r \in Neigh_p$, таких что $r \neq q$ и $ch\_stat_p[r] = branch$: $send(\textbf{initiate}, (rank, name, state))$
6. Если $state_p = find$:
   - 6.1 $N\_ch_p := 0$;
   - 6.2 $TEST_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- обновляет информацию о фрагменте (ранг, имя, статус поиска минимального граничного ребра),

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $receive(\textbf{initiate}, (rank, name, state)) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p) := (rank, name, state)$;
3. $parent_p := q$;
4. $(best\omega_p, best\_ch_p) := (\infty, \perp)$;
5. Для всех $r \in Neigh_p$, таких что $r \neq q$ и $ch\_stat_p[r] = branch$: $send(\textbf{initiate}, (rank, name, state))$
6. Если $state_p = find$:
   - 6.1 $N\_ch_p := 0$;
   - 6.2 $TEST_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- «сбрасывает» информацию о наилучшем известном граничном ребре,

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $receive(\textbf{initiate}, (rank, name, state)) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p) := (rank, name, state)$;
3. $parent_p := q$;
4. $(best\omega_p, best\_ch_p) := (\infty, \perp)$;
5. Для всех $r \in Neigh_p$, таких что $r \neq q$ и $ch\_stat_p[r] = branch$: $send(\textbf{initiate}, (rank, name, state))$
6. Если $state_p = find$:
   - 6.1 $N\_ch_p := 0$;
   - 6.2 $TEST_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- пересылает остальным соседям приказ о присоединении и

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $receive(\textbf{initiate}, (rank, name, state)) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p) := (rank, name, state)$;
3. $parent_p := q$;
4. $(best\omega_p, best\_ch_p) := (\infty, \perp)$;
5. Для всех $r \in Neigh_p$, таких что $r \neq q$ и $ch\_stat_p[r] = branch$: $send(\textbf{initiate}, (rank, name, state))$
6. Если $state_p = find$:
   - 6.1 $N\_ch_p := 0$;
   - 6.2 $TEST_p$

---

После получения приказа о присоединении узел

- если в приказе говорится продолжить поиск минимального граничного ребра, то присоединяется к поиску при помощи (*описанной далее*) процедуры $TEST_p$

# GHS: приём initiate узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **initiate**

1. $receive(\textbf{initiate}, (rank, name, state)) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. $(rank_p, name_p, state_p) := (rank, name, state)$;
3. $parent_p := q$;
4. $(best\omega_p, best\_ch_p) := (\infty, \perp)$;
5. Для всех $r \in Neigh_p$, таких что $r \neq q$ и $ch\_stat_p[r] = branch$: $send(\textbf{initiate}, (rank, name, state))$
6. Если $state_p = find$:
   - 6.1 $N\_ch_p := 0$;
   - 6.2 $TEST_p$

---

Вопрос: зачем узел сбрасывает информацию о наилучшем граничном ребре, останется ли алгоритм корректным, если этого не делать, и если нет, то почему?

# GHS: приём initiate узлом $p$

Процедура $TEST_p$:

1. Если $ch\_stat_p[q] = basic$ для какого-либо $q \in Neigh_p$:
   - 1.1 Выбрать указанный выше $q$ с наименьшим весом ребра $(p, q)$
   - 1.2 $test\_ch_p := q$;
   - 1.3 $send(\mathbf{test}, (rank_p, name_p)) \to q$
2. Иначе:
   - 2.1 $test\_ch_p := \perp$;
   - 2.2 $REPORT_P$

---

Узел $p$ в рамках поиска минимального граничного ребра

- выбирает инцидентное ребро типа *basic* (неопробованное) с наименьшим весом и отправляет в него сообщение **test** для проверки, является ли оно граничным,
- а если таких рёбер нет, то считает поиск завершённым и докладывает о результатах в сторону стержня

# GHS: приём initiate узлом $p$

Процедура $REPORT_p$:

1. Если $N\_ch_p = |\{q \mid q \in Neigh_p,\ ch\_stat_p = branch,\ q \neq parent_p\}|$ и $test\_ch_p \neq \perp$:
   - 1.1 $state_p := found$;
   - 1.2 $send(\textbf{report}, best\omega_p) \to parent_p$

---

Если узел получил от всех соседей из его фрагмента, кроме родителя, мнения о наилучших рёбрах и сам завершил поиск наилучшего ребра, то он отправляет своё мнение о наилучшем ребле в сторону стержня

# GHS: приём test узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение $(\textbf{test}, (rank, name))$, где $rank \leq rank_p$

1. $receive(\textbf{test}, (rank, name)) \leftarrow q$ для сообщения, указанного в предусловии
2. Если $name \neq name_p$ (*это граничное ребро*): $send(\textbf{accept}) \rightarrow q$
3. Иначе (*это внутреннее ребро*):
   - 3.1 Если $ch\_stat_p[q] = basic$: $ch\_stat_p[q] := reject$;
   - 3.2 Если $q \neq test\_ch_p$: $send(\textbf{reject}) \rightarrow q$
   - 3.3 Иначе: $TEST_P$

---

Если узел $q$ в фрагменте не большего ранга решил проверить ребро, то

1. если это другой фрагмент, то отправляется сообщение о том, что ребро граничное,
2. а иначе статус ребра изменяется на «внутреннее», и в зависимости от того, проверяет ли сейчас $p$ это ребро, этот узел либо продолжает перебирать инцидентные рёбра (запускает $TEST_p$), либо сообщает $q$ о том, что ребро внутреннее

# GHS: приём test узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение $(\textbf{test}, (rank, name))$, где $rank \leq rank_p$

1. $receive(\textbf{test}, (rank, name)) \leftarrow q$ для сообщения, указанного в предусловии
2. Если $name \neq name_p$ (*это граничное ребро*): $send(\textbf{accept}) \rightarrow q$
3. Иначе (*это внутреннее ребро*):
   - 3.1 Если $ch\_stat_p[q] = basic$: $ch\_stat_p[q] := reject$;
   - 3.2 Если $q \neq test\_ch_p$: $send(\textbf{reject}) \rightarrow q$
   - 3.3 Иначе: $TEST_P$

---

Вопрос: зачем блокировать приём сообщения от старшего фрагмента?

Вопрос: почему считается правильным в некоторых случаях (3.3) не отправлять «ожидаемый» ответ **reject**, и зачем вместо этого запускать процедуру $TEST_p$?

# GHS: приём accept узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение **accept**

1. $receive(\textbf{accept}) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. $test\_ch_p := \perp$;
3. Если $\omega_{(p,q)} < best\omega_p$:
   - 3.1 $best\omega_p := \omega_{(p,q)}$;
   - 3.2 $best\_ch_p := q$;
4. $REPORT_p$

---

Если на сообщение **test** в $TEST_p$ получен ответ, что проверяемое ребро действительно является граничным, то это ребро признаётся наилучшим инцидентным, поиск такого ребра завершается, и результат отправляется в сторону стержня

Вопрос: зачем «сбрасывать» значение $test\_ch_p$ — останется ли алгоритм корректным, если удалить этот «сброс», и если нет, то почему?

# GHS: приём reject узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение **reject**

1. $receive(\textbf{reject}) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. Если $ch\_stat_p[q] = basic$: $ch\_stat_p[q] := reject$;
3. $TEST_p$

---

Если на сообщение **test** получен ответ, что проверяемое ребро является внутренним, то статус ребра обновляется и поиск наилучшего инцидентного граничного ребра продолжается

# GHS: приём report узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **report**, такое что $q \neq parent_p$ или $state_p \neq find$

1. $receive(\mathbf{report}, \omega) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
   - 2.1 Если $\omega < best\omega_p$: $(bst\omega_p, best\_ch_p) := (\omega, q)$;
   - 2.2 $N\_ch_p := N\_ch_p + 1$;
   - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
   - 3.1 Если $\omega > best\omega_p$: $CHANGEROOT_p$
   - 3.2 Иначе: если $\omega = best\omega_p = \infty$, то завершить выполнение узла

---

Вопрос: объясните, почему сообщение типа **report** может быть получено только от узла того же фрагмента

Если доклад получен от ребёнка, то следует обновить мнение о лучшем граничном ребре, и если сбор докладов от детей и проверка рёбер завершены, то переслать доклад родителю

# GHS: приём report узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **report**, такое что $q \neq parent_p$ или $state_p \neq find$

1. $receive(\textbf{report}, \omega) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
   - 2.1 Если $\omega < best\omega_p$: $(bst\omega_p, best\_ch_p) := (\omega, q)$;
   - 2.2 $N\_ch_p := N\_ch_p + 1$;
   - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
   - 3.1 Если $\omega > best\omega_p$: $CHANGEROOT_p$
   - 3.2 Иначе: если $\omega = best\omega_p = \infty$, то завершить выполнение узла

---

Если же доклад получен от родителя, то это доклад от одного стержневого узла другому (они и только они являются взаимными родителями), и стержневой узел, нашедший ребро лучшего веса, запускает процедуру $CHANGEROOT_p$ отправки сообщения **connect** в ребро с этим весом

# GHS: приём report узлом $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение типа **report**, такое что $q \neq parent_p$ или $state_p \neq find$

1. $receive(\mathbf{report}, \omega) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. Если $q \neq parent_p$:
   - 2.1 Если $\omega < best\omega_p$: $(bst\omega_p, best\_ch_p) := (\omega, q)$;
   - 2.2 $N\_ch_p := N\_ch_p + 1$;
   - 2.3 $REPORT_p$
3. Иначе:
   - 3.1 Если $\omega > best\omega_p$: $CHANGEROOT_p$
   - 3.2 Иначе: если $\omega = best\omega_p = \infty$, то завершить выполнение узла

---

Если оба стержневых узла не нашли ни одного граничного ребра, то процедура построения MST в узле завершается

# GHS: приём report узлом $p$

Процедура $CHANGEROOT_p$:

1. Если $ch\_stat_p[best\_ch_p] = branch$: $send(\textbf{changeroot}) \to best\_ch_p$
2. Иначе:
   - 2.1 $send(\textbf{connect}, rank_p) \to best\_ch_p$
   - 2.2 $ch\_stat_p[best\_ch_p] := branch$;

---

Сообщение **changeroot** доставляется узлу, которому инцидентно найденное минимальное граничное ребро

В это ребро отправляется сообщение **connect** о намерении объединиться с фрагментом на другом конце ребра

# GHS: приём changeroot в узле $p$

Предусловие: в канале хотя бы от одного соседа $q$ есть сообщение **changeroot**

1. *receive*(**changeroot**) $\leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
2. $CHANGEROOT_p$

---

**Задача 2.** Ответьте хотя бы на три поставленных ранее вопроса

# GHS: свойства

**Теорема. Вычисление GHS обязательно конечно, и в заключительной конфигурации в каждом узле статусом** *branch* **отмечены рёбра MST и только они**

Доказательство.

Из описания и подробных пояснений должно быть ясно, что сообщение **connect** отправляется только в минимальное граничное ребро фрагмента

По утверждению 2, если каждый фрагмент, имеющий хотя бы одно граничное ребро, действительно отправляет сообщение **connect**, то алгоритмом действительно строится MST согласно условию теоремы

# GHS: свойства

Доказательство.

Покажем, что в любом фрагменте, отличном от MST, рано или поздно какой-либо узел отправляет сообщение **connect**

*Предположим от противного*, что это не так

Согласно описанию алгоритма, это означает, что в каждом фрагменте на очередном этапе выполнения действий этого фрагмента происходит блокировка: бесконечное безрезультатное ожидание того, что предусловие очередного действия станет истинным

Согласно схеме пересылки сообщений внутри фрагмента и между фрагментами, блокировка фрагмента $F_1$ (с рангом $rank_1$ и именем $name_1$) возможна только в тех случаях, когда сообщение из $F_1$ отправляется узлу другого фрагмента ($F_2$ с рангом $rank_2$ и именем $name_2$) и никогда не принимается в $F_2$ из-за невыполненного предусловия, и это возможно только для двух сообщений:

1. (**connect**, $rank_1$)
2. (**test**, ($rank_1$, $name_1$))

# GHS: свойства

Доказательство.

Для каждого из этих видов сообщений невозможность принять его в $F_2$ означает, что верно одно из следующих условий:

1. $rank_1 > rank_2$
2. $rank_1 = rank_2$ и $\omega_{e_{F_1}} > \omega_{e_{F_2}}$
3. $rank_1 = rank_2$, $\omega_{e_{F_1}} = \omega_{e_{F_2}}$, и в $F_2$ выполняется поиск минимального граничного ребра

**Задача 3.** Покажите, что невозможно выполнение хотя бы одного из трёх последних условий одновременно для каждого фрагмента
Это означает, что если существует текущий фрагмент, отличный от MST, то существует и незаблокированный фрагмент (*противоречие*) ▼

**Задача 4.**

- Оцените, сколько сообщений каждого типа отправляется при выполнении алгоритма
- Основываясь на этой оценке, покажите, что коммуникационная сложность GHS не превосходит $2|V|\log_2|V| + 5|E|$