Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

Блок 30

Избрание лидера в кольце:
алгоритм Ле-Ланна,
алгоритм Ченя-Робертса

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Алгоритм Ле-Ланна

Алгоритм избрания лидера среди инициаторов в произвольном однонаправленном кольце (V, E) (кольце, в котором сообщения могут отправляться по каналам только в одну сторону), придуманный Ле-Ланном в 1977 году, устроен следующим образом

Согласно устройству топологии, каждый узел может принять сообщение ровно от одного соседа (предыдущего в кольце) и отправить сообщение ровно одному соседу (следующему в кольце)

Будем считать, что в каналах поддерживается очерёдность сообщений (сообщение, отправленное в канал раньше, принимается из него раньше)

Каждый последователь обязательно проигрывает

Каждый инициатор ожидает, пока отправленная им фишка вернётся обратно, и принимает решение согласно собранной информации

Алгоритм Ле-Ланна

Код последователя p:

1. В бесконечном цикле:
   1.1 *receive*(**tok**, v)
   1.2 *send*(**tok**, v)
   1.3 *lost*

Переменная инициатора p:

- $S_p : 2^V = \{p\}$

Код инициатора p:

1. *send*(**tok**, p)
2. *receive*(**tok**, q)
3. Пока $q \neq p$:
   3.1 $S_p := S_p \cup \{q\}$;
   3.2 *send*(**tok**, q)
   3.3 *receive*(**tok**, q)
4. Если $p = \min(S_p)$, то *leader*, иначе *lost*

Алгоритм Ле-Ланна

Теорема. **Для любого однонаправленного кольца (V, E) алгоритм Ле-Ланна является алгоритмом избрания лидера среди инициаторов с коммуникационной сложностью $O(|V|^2)$ и сложностью $O(|V|)$ по времени**

Доказательство.

Однородность$*$ алгоритма очевидно следует из его устройства

Используя индукцию, можно показать, что:

- Каждый узел рано или поздно принимает фишки $(\mathbf{tok}, p)$ для всех инициаторов p, и для каждого инициатора — не более одной фишки
- Если расстояние от узла, следующего за инициатором q, до узла p меньше расстояния от узла, следующего за инициатором r, до p, то узел p получает фишку $(\mathbf{tok}, q)$ раньше фишки $(\mathbf{tok}, r)$

Алгоритм Ле-Ланна

Доказательство.

Коммуникационная сложность следует из того, что в каждый канал отправляет не более одной фишки для каждого инициатора

Завершаемость следует из того, что набор отправляемых фишек конечен

Успешность выборов следует из того, что если инициатор p принял фишку $(\mathbf{tok}, p)$, то до этого он обязательно принял фишки $(\mathbf{tok}, q)$ для всех остальных инициаторов q, а значит, после этого приёма наименьшее значение среди всех полученных — это наименьший идентификатор инициатора

Сложность по времени следует из того, что фишка $(\mathbf{tok}, p)$ для каждого заданного p отправляется последовательно во все каналы кольца, а значит, принимается узлом p спустя N единиц времени после отправки ▼

Алгоритм Ченя-Робертса

Алгоритм Ле-Ланна можно улучшить, если удалять из кольца фишки тех узлов, про которые ясно, что они проиграют выборы

То есть если не пересылать дальше фишку $(\mathbf{tok}, q)$, принятую узлом p, если $p < q$

Кроме того, если инициатор p принимает фишку $(\mathbf{tok}, q)$, такую что $q < p$, то он немедленно может признать себя проигравшим

Код последователя p оставим без изменений по сравнению с алгоритмом Ле-Ланна

Код инициатора p:

1. $send(\mathbf{tok}, p)$
2. Пока не выполнено *leader* или *lost*:
   - 2.1 $receive(\mathbf{tok}, q)$
   - 2.2 Если $q = p$: *leader*
   - 2.3 Иначе, если $q < p$:
     - 2.3.1 *lost*
     - 2.3.2 $send(\mathbf{tok}, q)$

Алгоритм Ченя-Робертса

Теорема (Задача 1). **Для любого однонаправленного кольца (V, E) алгоритм Ченя-Робертса является алгоритмом избрания лидера среди инициаторов с коммуникационной сложностью $\Theta(|V|^2)$ и сложностью $O(|V|)$ по времени**

(Внимание! В коммуникационной сложности написано не «O», а «Θ»: в худшем случае $o(|V|^2)$ сообщений недостаточно)

Теорема (Задача 2, трудная). **Если все узлы являются инициаторами, то алгоритм Ченя-Робертса имеет коммуникационную сложность $O(N \log N)$ в среднем относительно всех порядков расположения идентификаторов узлов в кольце**

Задача 3.

- Существенна ли для корректности алгоритма Ченя-Робертса очерёдность передачи сообщений в каналах?
- Для какого порядка идентификаторов в кольце заданного размера N суммарное число отправленных сообщений будет наименьшим, и сколько это сообщений?

Алгоритм Ченя-Робертса

В 1982 году Петерсон, и независимо — Долев, Клейв и Роде предложили алгоритм избрания лидера в однонаправленном кольце, имеющий коммуникационную сложность $O(N \log N)$ не в среднем, а в худшем случае, и независимо Франклин предложил схожий алгоритм с такой же оценкой коммуникационной сложности для двунаправленных колец

Но обсуждать эти алгоритмы в лекциях не будем (можете считать это *трудными задачами*)