Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Ещё немного о “$2 \times 2 = 4$”

Теорема. $2 \times 2 = 4$

Доказательство (?) 1.

$A_{\times \mathbf{0}}$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(φ_1)
$A_{+\mathbf{0}}$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{2} \times \mathbf{0}$	(φ_2)
$A_{t=}, \varphi_1, \varphi_2$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(φ_3)
$A_{=+\mathbf{s}}, \varphi_3$	$\models$	$\mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathbf{1}$	(φ_4)
$A_{+\mathbf{s}}$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{0})$	(φ_5)
$A_{t=}, \varphi_4, \varphi_5$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$	(φ_6)
$A_{=+\mathbf{s}}, \varphi_6$	$\models$	$\mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1}) = \mathbf{2}$	(φ_7)
$A_{+\mathbf{s}}$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{2} = \mathbf{s}(\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{1})$	(φ_8)
$A_{t=}, \varphi_7, \varphi_8$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{2} = \mathbf{2}$	(φ_9)
$A_{\times \mathbf{s}}$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{2}$	(φ_{10})
$A_{t=}, \varphi_9, \varphi_{10}$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{1} = \mathbf{2}$	
$\ldots$			
$A_{t=}, \ldots$	$\models$	$\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$	

▼

Ещё немного о “$2 \times 2 = 4$”

Теорема. $2 \times 2 = 4$

Доказательство (?) 2. $2 \times 2 = 2 \times 1 + 2$. $2 \times 1 = 2 \times 0 + 2$. $2 \times 0 = 0$. Значит, $2 \times 1 = 0 + 2 = 2$ и $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$ ▼

Доказательство (?) 3. Это очевидно верно ▼

Доказательство (?) 4. Предположим, что это не так: $2 \times 2 \neq 4$. Тогда $2 \times 1 \neq 2$, а значит, $2 \times 0 \neq 0$. Это противоречит тому, что любое число, умноженное на 0, есть 0 ▼

Доказательство (?) 5. Это прямое следствие из следующего очевидного факта: $2 \times 2 \neq i$ для любого числа i, отличного от 4 ▼

Доказательство (?) 6. Это прямое следствие из следующего очевидного факта: $2 \times 2 \neq 5$ ▼

Ещё немного о “$2 \times 2 = 4$”

Теорема. $2 \times 2 = 4$

Как проверить для каждого из шести предложенных наборов букв, **действительно ли** он является **доказательством** того, что $2 \times 2 = 4$?

Для **строгих** (математических) рассуждений о том, что является и что не является доказательством, требуется **строгое** (математическое) определение термина “доказательство”

Логические исчисления

Если отбросить всё "лишнее", то математическое доказательство теоремы — это последовательность *высказываний*, организованная особенным образом:

1. каждое высказывание — это "осмысленный" набор букв, допускающий ровно одну из двух оценок: **высказывание верно**, либо **высказывание неверно** — например:
   - $2 \times 2 = 4$
     - эта формула логики предикатов в каждой интерпретации либо истинна, либо ложна
   - рассматриваемая последовательность чисел s монотонна
     - каждая конкретная последовательность чисел либо монотонна, либо немонотонна
   - $P \neq NP$
     - классы сложности P и NP либо совпадают, либо не совпадают, *независимо от нашей способности это проверить*

Логические исчисления

Если отбросить всё "лишнее", то математическое доказательство теоремы — это последовательность *высказываний*, организованная особенным образом:

2. в любом месте доказательства можно высказать то, что считается верным без доказательства, например:
   - аксиомы
     - "любое отношение эквивалентности транзитивно"
   - в частности, определения
     - "единица — это число, следующее за нолём"
   - доказанные ранее теоремы
     - "площадь любого прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов"
   - текущие предположения
     - "(предположим, что) *эта* формула необщезначима"

Логические исчисления

Если отбросить всё "лишнее", то математическое доказательство теоремы — это последовательность *высказываний*, организованная особенным образом:

3. каждое следующее высказывание доказательства получается из предыдущих согласно логическим законам, позволяющим из верных высказываний получать другие верные высказывания, например:
   - *переход к частному*: если для любого объекта верно A, то и для *этого* объекта верно A
   - *правило отделения*: если верно A и из A следует B, то верно и B
   - *закон исключённого третьего*: верно либо A, либо отрицание A, третьего не дано
   - *рассуждение от противного*: если из того, что A верно, следует, что B и верно, и неверно, то A неверно
   - *разбор случаев*: если из A следует C, из B следует C, и обязательно верно A или B, то верно и C

Логические исчисления

Логическое исчисление включает в себя

- алфавит: множество символов, используемых для записи высказываний
- множество формул: “осмысленных” конечных последовательностей символов алфавита
- множество аксиом: формул, считающихся верными без доказательства
- множество правил вывода, задающих способ получения новых формул (верных высказываний) из имеющихся

Логические исчисления

Логическое исчисление называется исчислением предикатов, если:

- алфавитом исчисления является алфавит логики предикатов (*заданной сигнатуры* σ)
- множеством формул исчисления является множество всех формул логики предикатов сигнатуры σ

Исчисление предикатов полностью определяется

- сигнатурой алфавита
  - (*сигнатура будет считаться заданной по умолчанию*),
- множеством аксиом и
- множеством правил вывода

Далее "исчислениями"
называются исчисления предикатов

Исчисление Гильберта

Далее рассматривается пример исчисления предикатов, обозначенный символом $\mathfrak{H}$

Синтаксис схемы формулы отличается от синтаксиса формулы тем, что на местах атомарных формул разрешено также записывать специальные символы: параметры

Пример: $A \to (B \to A)$ — схема формулы с параметрами A, B

Записью $\Phi\,[\![A_1, \ldots, A_k]\!]$ обозначим схему формулы Φ, параметрами которой являются только символы $A_1, \ldots, A_k$

Записью $\Phi\,[\![A_1/\varphi_1, \ldots, A_k/\varphi_k]\!]$, где $\Phi\,[\![A_1, \ldots, A_k]\!]$ — схема формулы и $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — формулы, обозначим формулу, получающуюся заменой всех вхождений каждого параметра A_i на соответствующую формулу φ_i

Исчисление Гильберта

Схемой формулы $\Phi\,[\![A_1, \ldots, A_k]\!]$ порождается [с ограничениями R] любая формула вида $\Phi\,[\![A_1/\varphi_1, \ldots, A_k/\varphi_k]\!]$ [, такая что формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ удовлетворяют ограничениям R]

Пример: схемой аксиом $A \to (B \to A)$ в подходящей сигнатуре

- порождается формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to (\mathrm{Q}(\mathrm{x}) \to \mathrm{P}(\mathrm{x}))$
- порождается формула $\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) \to (\mathrm{P}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{c}, \mathrm{x}))$
- не порождается формула $\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) \to (\mathrm{P}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) \to \forall \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathbf{c}, \mathrm{y}))$

Исчисление Гильберта

Объявим аксиомами исчисления $\mathfrak{H}$ все формулы, порождаемые следующими схемами аксиом с параметрами A, B, C:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $A \,\&\, B \to A$
4. $A \,\&\, B \to B$
5. $A \to (B \to A \,\&\, B)$
6. $A \to (A \vee B)$
7. $B \to (A \vee B)$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
9. $\neg A \to (A \to B)$
10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
11. $A \vee \neg A$
12. $\forall \mathrm{x}\, A \to A\{\mathrm{x}/t\}$

    ограничение: переменная x свободна в формуле A для терма t
13. $A\{\mathrm{x}/t\} \to \exists \mathrm{x}\, A$

    ограничение: переменная x свободна в формуле A для терма t

Исчисление Гильберта

Правила вывода исчисления $\mathfrak{H}$ будут иметь следующий вид, где $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ и Φ — схемы формул:

$$(*)\colon \frac{\Psi_1, \ldots, \Psi_k}{\Phi}$$

Формула φ получается по правилу (*),
содержащему только параметры $A_1, \ldots, A_k$,
из формул $\psi_1, \ldots, \psi_k$,
если существуют формулы $\chi_1, \ldots, \chi_m$, такие что
$\varphi = \Phi\,[\![A_1/\chi_1, \ldots, A_k/\chi_k]\!]$ и
$\psi_i = \Phi_i\,[\![A_1/\chi_1, \ldots, A_k/\chi_k]\!]$, $1 \leq i \leq k$

Исчисление Гильберта

Включим в исчисление $\mathfrak{H}$ следующие два правила вывода:

1. modus ponens (правило отделения):
$$\frac{A, A \to B}{B}$$
2. правило обобщения:
$$\frac{A}{\forall \mathrm{x}\ A}, \text{ где } \mathrm{x} \text{ обозначает произвольную переменную}$$

Пример получения формул:

- формула $\forall \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$ получается из $\mathrm{P}(\mathrm{y})$ по правилу обобщения
- формула $\forall \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y})$ **не** получается из $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ по правилу обобщения
- формула $\mathrm{P}(\mathbf{c})$ получается из формул $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ и $\mathrm{Q}(\mathbf{x}) \to \mathrm{P}(\mathbf{c})$ по правилу отделения

Исчисление Гильберта

Вывод в исчислении $\mathfrak{H}$ — это конечная последовательность формул

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k,$$

такая что для каждой формулы φ_i, $1 \leq i \leq k$ верно хотя бы одно из следующих условий:

- она является аксиомой
- она получается из каких-либо формул φ_j, φ_k по правилу отделения, где $j < i$ и $k < i$
- она получается из какой-либо формулы φ_j по правилу обобщения, где $j < i$

Вывод, оканчивающийся формулой φ, также называется **доказательством** формулы φ в исчислении

Формула φ выводима (доказуема) в исчислении ($\vdash \varphi$), если существует вывод этой формулы

Исчисление Гильберта

Пример: одно из доказательств формулы $\forall x\ (P(x) \to P(x))$ в исчислении $\mathfrak{H}$ выглядит так:

1,	акс. :	$P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x))$
2,	акс. :	$(P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x))) \to$ $((P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x)))$
3,	m.p.(1+2) :	$(P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x))$
4,	акс. :	$P(x) \to (P(x) \to P(x))$
5,	m.p.(3+4) :	$P(x) \to P(x)$
	обобщ.(5) :	$\forall x\ (P(x) \to P(x))$

И что же этим доказывается?

Теорема Гёделя о полноте

Теорема Гёделя о полноте
(*корректность и полнота исчисления предикатов*)
Для любой формулы φ верно следующее:

$$\vdash \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \varphi$$

Доказательство. Не приводится (самостоятельно)

Добавим к аксиомам исчисления все аксиомы теории $\mathcal{T}$

Выводимость формулы φ в получившемся исчислении $\mathfrak{H}_{\mathcal{T}}$ обозначим так: $\mathcal{T} \vdash \varphi$

Следствие (обобщение теоремы Гёделя о полноте для аксиоматических теорий)
Для любой теории $\mathcal{T}$ и любой формулы φ верно следующее:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models_{\mathcal{T}} \varphi$$

Теорема Гёделя о полноте

Доказательство следствия.

$\models_{\mathcal{T}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T} \models \varphi$

По теореме компактности Мальцева,

$\mathcal{T} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует конечное подмножество $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ множества $\mathcal{T}$, такое что $\Gamma \models \varphi$

По теореме о логическом следствии,

$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \varphi$

По теореме Гёделя о полноте,

- $\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \varphi$
- $\psi_1, \ldots, \psi_k \vdash \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k$

По правилу отделения из формул $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \varphi$ и $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k$ получается формула φ

Значит, $\vdash \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \psi_1, \ldots, \psi_k \vdash \varphi$

По включению множества $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ в $\mathcal{T}$,

$\psi_1, \ldots, \psi_k \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T} \vdash \varphi$ ▼

Теорема Гёделя о полноте

Итог: в исчислении $\mathfrak{H}_{\mathcal{T}}$ **доказуемыми** являются в точности все **теоремы** теории $\mathcal{T}$

Таким образом, доказательство в исчислении $\mathfrak{H}_{\mathcal{T}}$ можно назвать формализацией общеупотребимого термина “доказательство”

Но, *как можно было заметить по примеру доказательства довольно простой формулы в* $\mathfrak{H}$,

- структура доказательств в $\mathfrak{H}_{\mathcal{T}}$ не в полной мере соответствует структуре “реальных” доказательств
- доказательства даже простых формул в $\mathfrak{H}_{\mathcal{T}}$ трудно понять, а тем более придумать

Натуральное исчисление Генцена

Характерные особенности исчислений $\mathfrak{H}_{\mathcal{T}}$:

- в правилах вывода отражены только самые простые логические законы
- остальные логические законы сформулированы в виде аксиом
- в определении вывода отсутствует возможность явно делать **предположения**: выписывать формулы, считающиеся временно верными — например, в рамках разбора случаев или рассуждения от противного

Приведём пример исчисления ($\mathfrak{G}$), противоположного с точки зрения этих особенностей

Натуральное исчисление Генцена

Исчисление $\mathfrak{G}$ не содержит ни одной аксиомы

В выводе исчисления $\mathfrak{G}$ будет разрешено, кроме формул, записывать другие (вспомогательные) выводы

Список формул глубины 0 — это конечная последовательность формул

Список формул глубины $(n+1)$, где $n \in \mathbb{N}_0$, — это конечная последовательность, элементами которой являются формулы и списки формул глубины $0, 1, \ldots, n$, содержащая хотя бы один список глубины n

Список формул — это список формул любой глубины n, $n \in \mathbb{N}_0$

Выводы исчисления $\mathfrak{G}$ — это списки формул, построенные по особенным правилам

Натуральное исчисление Генцена

В правилах вывода исчисления $\mathfrak{G}$, помимо схем формул, будут встречаться схемы вывода: записи вида $\Phi \vdash \Psi$, обозначающие **доказанный** факт выводимости формулы, обозначенной схемой формулы Ψ, в предположении о верности формулы, обозначенной схемой формулы Φ

Правила вывода исчисления $\mathfrak{G}$, будут иметь следующий вид, где $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ и Φ — схемы формул и $D_1, \ldots, D_t$ — схемы вывода:

$$\frac{\Psi_1, \ldots, \Psi_k, D_1, \ldots, D_t}{\Phi}$$

Натуральное исчисление Генцена

Формула φ получается по правилу

$$\frac{\Psi_1, \ldots, \Psi_k, D_1, \ldots, D_t}{\Phi},$$

содержащему только параметры $A_1, \ldots, A_m$,
из формул $\psi_1, \ldots \psi_k$ и списков формул $s_1, \ldots, s_t$, если существуют формулы $\chi_1, \ldots, \chi_m$, такие что

- $\varphi = \Phi\,[\![A_1/\chi_1, \ldots, A_m/\chi_m]\!]$
- $\psi_i = \Psi_i\,[\![A_1/\chi_1, \ldots, A_m/\chi_m]\!]$, $1 \leq i \leq k$
- s_j начинается формулой $\Phi_1\,[\![A_1/\chi_1, \ldots, A_m/\chi_m]\!]$ и оканчивается формулой $\Phi_2\,[\![A_1/\chi_1, \ldots, A_m/\chi_m]\!]$, где $D_j = \Phi_1 \vdash \Phi_2$, $1 \leq j \leq t$

Натуральное исчисление Генцена

Правила вывода исчисления $\mathfrak{G}$:

- правило введения конъюнкции $R^+\,\&$:
$$\frac{A, B}{A \,\&\, B}$$
- правила удаления конъюнкции $R^-\,\&$:
$$\frac{A \,\&\, B}{A}, \qquad \frac{A \,\&\, B}{B}$$
- правила введения дизъюнкции $R^+\vee$:
$$\frac{A}{A \vee B}, \qquad \frac{B}{A \vee B}$$
- правило удаления дизъюнкции $R^-\vee$ (правило разбора случаев)
$$\frac{A \vee B, A \vdash C, B \vdash C}{C}$$

Натуральное исчисление Генцена

Правила вывода исчисления $\mathfrak{G}$:

- правило введения импликации $R^{+}\rightarrow$
  (иногда называется также правилом дедукции)
  $$\frac{A \vdash B}{A \rightarrow B}$$
- правило удаления импликации $R^{-}\rightarrow$
  (правило отделения)
  $$\frac{A \rightarrow B, A}{B}$$
- правило введения отрицания $R^{+}\neg$
  (правило рассуждения от противного)
  $$\frac{A \vdash B \,\&\, \neg B}{\neg A}$$
- правило удаления отрицания $R^{-}\neg$
  $$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Натуральное исчисление Генцена

Правила вывода исчисления $\mathfrak{G}$:

- правило введения всеобщности $R^{+}\forall$ (правило обобщения)
$$\frac{A}{\forall \mathtt{x}\ A}$$
- правило удаления всеобщности $R^{-}\forall$ (переход к частному)
$$\frac{\forall \mathtt{x}\ A}{A\{\mathtt{x}/t\}}$$
(*переменная* $\mathtt{x}$ *свободна для терма* t *в* A)
- правило введения существования $R^{+}\exists$
$$\frac{A\{\mathtt{x}/t\}}{\exists \mathtt{x}\ A}$$
(*переменная* $\mathtt{x}$ *свободна для терма* t *в* A)
- правило удаления существования $R^{-}\exists$
$$\frac{\exists \mathtt{x}\ A, A\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \vdash B}{B}$$
(*константа* $\mathtt{c}$ *не содержится в* A *и* B)

Натуральное исчисление Генцена

Список формул $L = z_1, \ldots, z_k$ называется условным выводом над множеством допущений X, где X — множество формул, если z_1 и z_k — формулы и каждый элемент z_i, $1 \leq i \leq k$, удовлетворяет одному из следующих условий:

1. он является формулой из X
2. он является условным выводом над множеством допущений $X \cup \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_t}\}$, где $z_{i_1}, \ldots, z_{i_t}$ — все формулы списка L, располагающиеся перед z_i
3. он является формулой, получающейся по одному из правил $R^+\&$, $R^-\&$, $R^+\vee$, $R^-\vee$, $R^+\to$, $R^-\to$, $R^+\neg$, $R^-\neg$, $R^+\forall$, $R^-\forall$, $R^+\exists$, $R^-\exists$ из формул и списков формул, располагающихся перед z_i, со следующим ограничением:
   - правило $R^-\exists$ $\left(\dfrac{\exists \mathrm{x}\, A, A\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \vdash B}{B}\right)$ применяется только в том случае, если константа $\mathbf{c}$ не входит в формулы множества допущений X

Натуральное исчисление Генцена

Для технической простоты полагаем, что сигнатура формул исчисления $\mathfrak{G}$ содержит счётно-бесконечное числом "технических" констант, позволяющих применять правила $R^{-}\exists$ и $R^{-}\forall$ неограниченное число раз при построении вывода

Безусловный вывод отличается от условного вывода тем, что может начинаться со списка формул

Безусловный вывод над **пустым множеством** допущений, оканчивающийся формулой φ называется выводом (**доказательством**) формулы φ в исчислении $\mathfrak{G}$

Формула φ выводима (доказуема) в исчислении $\mathfrak{G}$ ($\vdash \varphi$), если существует вывод этой формулы в $\mathfrak{G}$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$A \vee \neg A$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$\neg(A \vee \neg A)$

$A \vee \neg A$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\quad\vdots \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A
\end{array}$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$\begin{array}{|l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\quad\vdots \\
\quad\vdots \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{l} A \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\\ \\ \\ \\
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\quad A \\
\quad \vdots \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\quad \neg A \\
\quad \vdots \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\vdots \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\quad A \\
\quad \vdots \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\quad \neg A \\
\quad \vdots \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
\\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{l} A \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{l} \neg A \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
A \,\&\, \neg A \qquad (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{l}
A \\
A \vee \neg A \qquad (R^{+}\vee)
\end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{l}
\neg A
\end{array}\right. \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
A \,\&\, \neg A \qquad (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{ll}
A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee) \\
\neg(A \vee \neg A) & (\text{допущение})
\end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{l}
\neg A \\
\\
\\
\\
\end{array}\right. \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
A \,\&\, \neg A \qquad (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{ll}
A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee) \\
\neg(A \vee \neg A) & (\text{допущение}) \\
(A \vee \neg A) \,\&\, \neg(A \vee \neg A) & (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{l}
\neg A \\
\\
\\
\\
\\
\end{array}\right. \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
A \,\&\, \neg A \qquad (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{ll}
A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee) \\
\neg(A \vee \neg A) & (\text{допущение}) \\
(A \vee \neg A) \,\&\, \neg(A \vee \neg A) & (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{ll}
\neg A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee)
\end{array}\right. \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
A \,\&\, \neg A \qquad (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{ll}
A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee) \\
\neg(A \vee \neg A) & (\text{допущение}) \\
(A \vee \neg A) \,\&\, \neg(A \vee \neg A) & (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{ll}
\neg A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee) \\
\neg(A \vee \neg A) & (\text{допущение})
\end{array}\right. \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
A \,\&\, \neg A \qquad (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Пример. Одно из доказательств закона исключённого третьего $A \vee \neg A$ (*для любой формулы* A) в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\neg(A \vee \neg A) \\
\left|\begin{array}{ll}
A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee) \\
\neg(A \vee \neg A) & (\text{допущение}) \\
(A \vee \neg A) \,\&\, \neg(A \vee \neg A) & (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
\left|\begin{array}{ll}
\neg A & \\
A \vee \neg A & (R^{+}\vee) \\
\neg(A \vee \neg A) & (\text{допущение}) \\
(A \vee \neg A) \,\&\, \neg(A \vee \neg A) & (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg A \qquad (R^{+}\neg) \\
A \qquad (R^{-}\neg) \\
A \,\&\, \neg A \qquad (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\neg(A \vee \neg A) \qquad (R^{+}\neg) \\
A \vee \neg A \qquad (R^{-}\neg)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$\exists x\, P(x)$$

$$\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\\
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+} \to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\\
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+} \to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+} \to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{-}\exists)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{l}
\forall x\, \neg P(x) \\
\\
\\
\\
\\
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{-}\exists)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{l}
\forall x\, \neg P(x) \\
\\
\\
\\
P(\mathbf{c})\, \& \, \neg P(\mathbf{c})
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{-}\exists)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+} \to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{l}
\forall x\, \neg P(x) \\
\\
\\
\\
P(\mathbf{c})\,\&\,\neg P(\mathbf{c})
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\neg)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{-}\exists)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{l}
\forall x\, \neg P(x) \\
\neg P(\mathbf{c}) \qquad (R^{-}\forall) \\
\\
P(\mathbf{c})\, \& \, \neg P(\mathbf{c})
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\neg)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{-}\exists)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{ll}
\forall x\, \neg P(x) & \\
\neg P(\mathbf{c}) & (R^{-}\forall) \\
P(\mathbf{c}) & (\text{допущение}) \\
P(\mathbf{c})\, \& \, \neg P(\mathbf{c}) &
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\neg)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{-}\exists)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Другой пример. Одно из доказательств формулы $\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x)$ в исчислении $\mathfrak{G}$ выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
\exists x\, P(x) \\
\left|\begin{array}{l}
P(\mathbf{c}) \\
\left|\begin{array}{ll}
\forall x\, \neg P(x) & \\
\neg P(\mathbf{c}) & (R^{-}\forall) \\
P(\mathbf{c}) & (\text{допущение}) \\
P(\mathbf{c})\,\&\,\neg P(\mathbf{c}) & (R^{+}\,\&)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\neg)
\end{array}\right. \\
\neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{-}\exists)
\end{array}\right. \\
\exists x\, P(x) \to \neg\forall x\, \neg P(x) \qquad (R^{+}\to)
\end{array}
$$

Натуральное исчисление Генцена

Теорема корректности и полноты исчисления $\mathfrak{G}$

Для любой формулы φ верно следующее:

$$\vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi$$

Доказательство. Не приводится в связи с большим объёмом технических выкладок

Факт существования безусловного вывода над множеством допущений $\mathcal{T}$ в исчислении $\mathfrak{G}$ для формулы φ, где $\mathcal{T}$ — теория, обозначим так: $\mathcal{T} \vdash \varphi$

Следствие

Для любой теории $\mathcal{T}$ и любой формулы φ верно следующее:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models_{\mathcal{T}} \varphi$$

Доказательство. Полностью повторяет доказательство аналогичного следствия из теоремы Гёделя о полноте

Заключение

“Логическое исчисление” — крайне широкое понятие, охватывающее не только системы доказательства высказываний, схожие с упомянутыми ранее

Например, исчислением можно назвать

- аппарат семантических таблиц (для проверки общезначимости формул), если назвать семантические таблицы формулами, закрытые таблицы аксиомами, а правила табличного **вывода**, развёрнутые наоборот, — правилами вывода исчисления
- аппарат резолютивного вывода, если назвать системы дизъюнктов формулами, все системы с пустым дизъюнктом аксиомами, а правила резолюции и склейки, переформулированные как правила удаления избыточных дизъюнктов, — правилами вывода

Заключение

“Логическое исчисление” — крайне широкое понятие, охватывающее не только системы доказательства высказываний, схожие с упомянутыми ранее

Например, исчислением можно назвать

- логику Хоара, если объявить триплеты Хоара формулами, общезначимые формулы — аксиомами и так же развернуть правила вывода
- саму семантику последовательных программ: достаточно объявить состояния вычисления формулами, а свод правил одного шага вычисления программы — правилами вывода
- ...