Задача 1 (о независимом множестве чисел)

Натуральные числа m и n называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен единице. Множество M натуральных чисел назовем независимым, если любые два числа из этого множества являются взаимно простыми.

Найти, чему равна наибольшая мощность $\nu(N)$ независимого множества натуральных чисел, каждое из которых не превосходит натурального числа N.

Задача 2 (о независимом множестве в дереве)

Множество вершин $M \subseteq V$ называется независимым графе $G = (V, E)$, если никакая пара вершин из этого множества не связана ребром в графе G. Дерево — связный граф без циклов.

Найти наибольшую мощность $\delta(p)$ независимого множества вершин в деревьях с p вершинами.

Задача 3 (о наименьшем числе умножений)

Вычислим булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, пользуясь операциями *отрицания* $\overline{x} = x \oplus 1$, *сложения по модулю два* $x \oplus y$ и *умножения (конъюнкции)* $x \& y$. Можем применять любую из этих трех операций, но считаем только умножения (конъюнкции). *Например*, функцию медиана $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$ можно вычислить за одно умножение:

$$y_1 := x_1 \oplus x_2, \quad y_2 := x_1 \oplus x_3, \quad y_3 := y_1 \& y_2, \quad z := y_3 \oplus x_1.$$

В переменной z находится значение медианы $m(x_1, x_2, x_3)$, мы воспользовались выражением

$$x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \oplus x_3) \oplus x_1.$$

Булева функция называется квадратичной, если в её полиноме Жегалкина встречаются слагаемые, в которых не более двух переменных. *Например*, медиана $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$ является квадратичной функцией.

Выяснить, за какое наименьшее число умножений $\mu(n)$ можно вычислить произвольную квадратичную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$.

Задача 4 (о монотонности квадратичной функции)

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной, если из $\alpha \leqslant \beta$ следует $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$. Булева функция называется линейной, если в ее полиноме Жегалкина нет произведений переменных. Среди линейных функций монотонными являются только функции константа 0, константа 1, тождественная x_i. Булева функция называется квадратичной, если в ее полиноме Жегалкина встречаются слагаемые, в которых не более двух переменных.

Определить, какой вид имеют монотонные квадратичные булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Задача 5 (о выражении сложения через умножение)

В булевой алгебре *сложение по модулю два* $x \oplus y$ можно выразить через *умножение (конъюнкцию)* $x \cdot y$, *отрицание* $\overline{x} = x \oplus 1$ и *константы* $0, 1$: $x \oplus y = ((x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1) \cdot (xy \oplus 1)$. Здесь мы пользуемся правилом $x \oplus x = 0$. Рассмотрим *сложение* $x + y$ и *умножение* $x \cdot y$ *по модулю* k, *отрицание* $\overline{x} = x + 1$ и *константы* $0, 1, \dots, k-1$, где k — заданное натуральное число.

Выяснить, можно ли при каком-то $k \geqslant 3$ сложение $x + y$ по модулю k выразить через умножение $x \cdot y$ по модулю k, отрицание $\overline{x} = x + 1$ и константы $0, 1, \dots, k-1$.