Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2015, весенний семестр

Алгоритм унификации

Задача унификации

Подстановка θ — наиболее общий унификатор выражений E_1, E_2 (НОУ(E_1, E_2)), если:

1. θ — унификатор выражений E_1, E_2 $\quad (E_1\theta = E_2\theta)$
2. любой унификатор η выражений E_1, E_2 может быть получен из θ $\quad (\exists\rho \quad \eta = \theta\rho)$

Задача унификации:
Даны выражения E_1, E_2
Выяснить, являются ли они унифицируемыми,
и если являются, то найти их наиболее общий унификатор

Алгоритм унификации

Будем двигаться от простого к сложному

I. Как выглядит НОУ(x, t)? $(x \in Var,\ t \in Term)$

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$ **и** $t \in Term$**. Тогда:**

1. **если** $x \notin Var_t$, **то** $\{x/t\} \in$ НОУ(x, t)
2. **если** $x \in Var_t$ **и** $x \neq t$, **то** НОУ$(x, t) = \emptyset$

Доказательство.

1. Пусть $x \notin Var_t$

По определению НОУ достаточно показать, что:

а) $\{x/t\}$ — унификатор термов x и t

б) любой унификатор термов x и t может быть получен из $\{x/t\}$

Алгоритм унификации

Будем двигаться от простого к сложному

I. Как выглядит НОУ(x, t)? $(x \in Var,\ t \in Term)$

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$ **и** $t \in Term$**. Тогда:**

1. **если** $x \notin Var_t$, **то** $\{x/t\} \in$ НОУ(x, t)
2. **если** $x \in Var_t$ **и** $x \neq t$, **то** НОУ$(x, t) = \emptyset$

Доказательство.

1. Пусть $x \notin Var_t$

a) $x\{x/t\} = t = t\{x/t\}$ (т.к. $x \notin Var_t$)

Алгоритм унификации

Будем двигаться от простого к сложному

I. Как выглядит НОУ(x, t)? $(x \in Var,\ t \in Term)$

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$ **и** $t \in Term$**. Тогда:**

1. **если** $x \notin Var_t$, **то** $\{x/t\} \in$ НОУ(x, t)
2. **если** $x \in Var_t$ **и** $x \neq t$, **то** НОУ$(x, t) = \emptyset$

Доказательство.

1. Пусть $x \notin Var_t$

б) Рассмотрим произвольный унификатор θ термов x, t и произвольную переменную y

Если $y = x$, то $x\{x/t\}\theta = t\theta = x\theta$ (т.к. θ — унификатор)

Если $y \neq x$, то $y\{x/t\}\theta = y\theta$

Итого: для любой переменной y верно $y\{x/t\}\theta = y\theta$

А значит, $\{x/t\}\theta = \theta$

Алгоритм унификации

Будем двигаться от простого к сложному

I. Как выглядит НОУ(x, t)? $(x \in Var,\ t \in Term)$

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$ **и** $t \in Term$**. Тогда:**

1. **если** $x \notin Var_t$, **то** $\{x/t\} \in$ НОУ(x, t)
2. **если** $x \in Var_t$ **и** $x \neq t$, **то** НОУ$(x, t) = \emptyset$

Доказательство.

2. Пусть $x \in Var_t$ и $x \neq t$

Рассмотрим произвольную подстановку θ

Длина терма $t(x)\theta$ больше длины терма $x\theta$

Следовательно, $t(x)\theta \neq x\theta$ для любой подстановки θ

А значит, НОУ$(x, t) = \emptyset$

конец доказательства

Алгоритм унификации

Как выглядит общий случай?

Достаточно уметь унифицировать атомарные формулы:

$$E_1 = P(t_1, \ldots, t_k), \qquad E_2 = P(s_1, \ldots, s_k)$$

Чтобы это сделать, достаточно подобрать значения переменных, для которых верно:

$$t_1 = s_1, \quad \ldots, \quad t_k = s_k$$

Тогда для атомов E_1, E_2 запишем систему уравнений

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

и будем решать задачу унификации для систем уравнений

Алгоритм унификации

Определение. **Подстановка θ является унификатором системы уравнений $\mathcal{E}$, где**

$$\mathcal{E} = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k, \end{cases}$$

если $t_i\theta = s_i\theta$ для всех i, $1 \leq i \leq k$

Наиболее общий унификатор системы уравнений (НОУ($\mathcal{E}$)) определяется так же, как и для подстановок

(определить самостоятельно)

Есть ли связь между унификатором системы уравнений и решением системы уравнений?

Есть: унификатор — это решение системы уравнений в свободной алгебре термов (эрбрановской интерпретации)

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} f(c,x) & = & f(y,g(y)) \\ g(y) & = & z \end{array} \right. \quad \mathcal{E}_1\theta : \left\{ \begin{array}{rcl} f(c,g(c)) & = & f(c,g(c)) \\ g(c) & = & g(c) \end{array} \right.$$

Наиболее общий унификатор системы $\mathcal{E}_1$:

$$\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$$

$$\mathcal{E}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} f(c,y) & = & f(y,g(y)) \\ g(y) & = & z \end{array} \right.$$

Система $\mathcal{E}_2$ неунифицируема (не имеет решений) (почему?)

Алгоритм унификации

Утверждение

Пусть заданы атомы

$$E_1 = P(t_1, \ldots, t_k), \qquad E_2 = P(s_1, \ldots, s_k)$$

и система уравнений

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \quad \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

Тогда $\text{НОУ}(E_1, E_2) = \text{НОУ}(\mathcal{E})$

Доказательство. Очевидно
(следует из определений наиболее общего унификатора)

Алгоритм унификации

II. Мы переформулировали НОУ(E_1, E_2) как НОУ$(\mathcal{E}(E_1, E_2))$
Какие системы уравнений решаются легко?

Определение. **Система уравнений $\mathcal{E}$ называется приведённой, если она имеет вид**

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = t_1 \\ \dots \\ x_k = t_k, \end{cases}$$

где:

- $x_1, \dots, x_k \in Var$
- переменные $x_1, \dots, x_k$ попарно различны
- $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \bigcup\limits_{i=0}^{k} Var_{t_k} = \emptyset$

Алгоритм унификации

II. Мы переформулировали НОУ(E_1, E_2) как НОУ$(\mathcal{E}(E_1, E_2))$
Какие системы уравнений решаются легко?

Пример

$$\begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(c) \end{cases}$$

$\uparrow$

Приведённая система

$$\begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ x = w \\ y = f(c, c) \\ g(z) = f(c, x) \end{cases}$$

$\uparrow$

Неприведённая система

Алгоритм унификации

II. Мы переформулировали НОУ(E_1, E_2) как НОУ$(\mathcal{E}(E_1, E_2))$
Какие системы уравнений решаются легко?

Лемма (о приведённой системе)
Если система

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = t_1 \\ \quad \dots \\ x_k = t_k \end{cases}$$

является приведённой, то $\{x_1/t_1, \dots, x_k/t_k\} \in$ НОУ$(\mathcal{E})$

Доказательство. Самостоятельно
(с использованием леммы о связке)

Алгоритм унификации

III. Что же делать с системой уравнений общего вида?

Будем преобразовывать такую систему, используя метод исключения переменных

В результате получим приведённую систему

Необходимо в процессе преобразования получать только равносильные системы

Определение. **Системы уравнений** $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ **равносильны, если** $\text{НОУ}(\mathcal{E}_1) = \text{НОУ}(\mathcal{E}_2)$

Алгоритм унификации

Описание алгоритма унификации
(алгоритм Мартелли-Монтанари[1])

Описывается 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила произвольно (недетерминированно) применяются до тех пор, пока не будет

- получена приведённая система уравнений (решение для которой известно: лемма о приведённой системе) или
- установлена невозможность унификации

$\mathcal{E}_0$ — исходная система; $i = 0$;
`while`(к системе $\mathcal{E}_i$ применимо хотя бы одно из 6 правил) `{`
    выбрать правило R, применимое к $\mathcal{E}_i$;
    $\mathcal{E}_{i+1} = R(\mathcal{E}_i)$;
    $i = i + 1$;
`}`

[1] Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

Алгоритм унификации

Правила преобразования системы уравнений

(1) Заменить $f(t_1, \ldots, t_k) = f(s_1, \ldots, s_k)$ на

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \quad \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

(2) Если в системе есть уравнение $f(t_1, \ldots, t_k) = g(s_1, \ldots, s_m)$, где $f, g \in Func \cup Const$ и $f \neq g$, то СТОП: унификатора нет

(3) Заменить $t = x$ на $x = t$ $\quad (x \in Var,\ t \notin Var)$

(4) Удалить $t = t$

Алгоритм унификации

Правила преобразования системы уравнений

(5) Если в системе есть уравнение $x = t$, где

- $x \in Var$,
- $x \notin Var_t$,
- x встречается в других уравнениях системы,

то применить подстановку $\{x/t\}$ ко всем другим уравнениям системы

(6) Если в системе есть уравнение $x = t$, где $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то СТОП: унификатора нет

Алгоритм унификации

Пример 1

$$\begin{cases} f(f(x,c),y) & = & f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) & = & y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{cases} f(x,c) & = & y \\ y & = & f(z,z) \\ f(u,v) & = & y \end{cases} \xrightarrow{(5)} \begin{cases} f(x,c) & = & f(z,z) \\ y & = & f(z,z) \\ f(u,v) & = & f(z,z) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{cases} x & = & c \\ z & = & c \\ y & = & f(c,c) \\ u & = & c \\ v & = & c \end{cases} \xleftarrow{(5)} \begin{cases} x & = & z \\ z & = & c \\ y & = & f(z,z) \\ u & = & z \\ v & = & z \end{cases} \xleftarrow{(3)} \begin{cases} x & = & z \\ c & = & z \\ y & = & f(z,z) \\ u & = & z \\ v & = & z \end{cases}$$

Алгоритм унификации

Пример 1

Чего мы в итоге добились?

$$\mathcal{E} = \begin{cases} f(f(x,c),y) & = & f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) & = & y \end{cases}$$

$$\Big\downarrow (1), (3), (5)$$

$$\begin{cases} x & = & c \\ z & = & c \\ y & = & f(c,c) \\ u & = & c \\ v & = & c \end{cases}$$

– приведённая система

$$\{x/c, y/f(c,c), z/c, u/c, v/c\} \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$$

Алгоритм унификации

Пример 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} g(u) & = & g(y) \\ g(x) & = & v \\ f(u,v) & = & f(x,y) \end{array}\right. \xmapsto{(1)} \left\{\begin{array}{rcl} u & = & y \\ g(x) & = & v \\ u & = & x \\ v & = & y \end{array}\right.$$

$$\xmapsto{(5)}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & y \\ g(x) & = & v \\ y & = & x \\ v & = & y \end{array}\right. \xmapsto{(5)} \left\{\begin{array}{rcl} u & = & x \\ g(x) & = & v \\ y & = & x \\ v & = & x \end{array}\right. \xmapsto{(5)} \left\{\begin{array}{rcl} u & = & x \\ g(x) & = & x \\ y & = & x \\ v & = & x \end{array}\right.$$

$$\xmapsto{(3),\ (6)}$$

СТОП: унификатора нет

Алгоритм унификации

Теорема (об унификации)
Для любой системы уравнений $\mathcal{E}$:

1. **алгоритм Мартелли-Монтанари завершает свою работу на $\mathcal{E}$** (**завершаемость**)
2. **если алгоритм завершил работу с ответом — подстановкой θ, то $\theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$** (**корректность**)
3. **система $\mathcal{E}$ неунифицируема $\Leftrightarrow$ алгоритмом выдаётся сообщение**
   СТОП: унификатора нет (**полнота**)

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Придумаем характеристику системы $\mathcal{E}$, которая убывает при применении правил и при этом не может убывать бесконечно долго

Переменная x системы $\mathcal{E}$ — приведённая, если в $\mathcal{E}$ есть уравнение $x = t$, такое что $x \notin Var_t$ и x не содержится в остальных уравнениях системы

Характериситка системы $\mathcal{E}$ — упорядоченная тройка чисел $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E}) \rangle$, где:

- $h_1(\mathcal{E})$ — число неприведённых переменных системы $\mathcal{E}$
- $h_2(\mathcal{E})$ — число функциональных символов и констант в левых частях уравнений системы $\mathcal{E}$
- $h_3(\mathcal{E})$ — число уравнений системы $\mathcal{E}$

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

На множестве троек натуральных чисел (с нолём) введём лексикографический порядок:

$$\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1, n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1, n_2 = m_2, n_3 > m_3 \end{array} \right.$$

Например,

$$\langle 2, 11, 2 \rangle \succ \langle 2, 10, 5578 \rangle \succ \langle 2, 10, 5577 \rangle \succ \langle 1, 1001, 78 \rangle$$

При применении правил (2), (6) алгоритм завершает работу

Покажем, что характеристика системы убывает при применении правил (1), (3), (4), (5)

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Покажем, что характеристика системы убывает при применении правил (1), (3), (4), (5):

$$\mathcal{E} \xmapsto{(i)} \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad H(\mathcal{E}) \succ H(\mathcal{E}')$$

Как выглядит применение правила (1):

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ f(t_1, \dots, t_k) = f(s_1, \dots, s_k) \\ \dots \end{array} \right. \xmapsto{(1)} \mathcal{E}' = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \quad t_1 = s_1 \\ \quad \dots \\ \quad t_k = s_k \\ \dots \end{array} \right.$$

$$h_1(\mathcal{E}) \geq h_1(\mathcal{E}'), \quad h_2(\mathcal{E}) > h_2(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Покажем, что характеристика системы убывает при применении правил (1), (3), (4), (5):

$$\mathcal{E} \xmapsto{(i)} \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad H(\mathcal{E}) \succ H(\mathcal{E}')$$

Как выглядит применение правила (3):

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ t = x \\ \dots \end{array} \right. \xmapsto{(3)} \mathcal{E}' = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ x = t \\ \dots \end{array} \right.$$

$$h_1(\mathcal{E}) \geq h_1(\mathcal{E}'), \quad h_2(\mathcal{E}) > h_2(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Покажем, что характеристика системы убывает при применении правил (1), (3), (4), (5):

$$\mathcal{E} \xmapsto{(i)} \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad H(\mathcal{E}) \succ H(\mathcal{E}')$$

Как выглядит применение правила (4):

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ t = t \\ \dots \end{array} \right. \xmapsto{(4)} \mathcal{E}' = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \\ \dots \end{array} \right.$$

$$h_1(\mathcal{E}) \geq h_1(\mathcal{E}'), \quad h_2(\mathcal{E}) \geq h_2(\mathcal{E}'), \quad h_3(\mathcal{E}) > h_3(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Покажем, что характеристика системы убывает при применении правил (1), (3), (4), (5):

$$\mathcal{E} \xmapsto{(i)} \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad H(\mathcal{E}) \succ H(\mathcal{E}')$$

Как выглядит применение правила (5):

$$\mathcal{E} = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_l = s_l \end{cases} \xmapsto{(5)} \mathcal{E}' = \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_l\{x/s_j\} = s_l\{x/s_j\} \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}) > h_1(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Осталось показать, что характеристика не может убывать бесконечно долго

Лемма

В множестве троек натуральных чисел не существует последовательности, бесконечно убывающей относительно лексикографического порядка:

$$\langle n_1, m_1, k_1 \rangle \succ \langle n_2, m_2, k_2 \rangle \succ \dots \ ,$$

Иными словами, $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ — фундированное множество

Доказательство леммы. Самостоятельно

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Что такое фундированность: наглядный пример

Представьте, что у Вас есть 1 000 000 $ в любых купюрах

Теперь начнём игру с такими правилами

В каждом раунде Вы делаете одно из двух:

1. даёте мне купюру и взамен получаете купюры меньших достоинств — сколько хотите и каких хотите
2. даёте мне купюру наименьшего достоинства и взамен не получаете ничего

Тогда играть бесконечно долго Вы не сможете, и в конце обязательно останетесь без денег

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость

Итого:

- исходная система $\mathcal{E}$ имеет (конечную) характеристику
- при применении правил (1), (3), (4), (5) характеристика уменьшается
- характеристика не может уменьшаться бесконечно долго
- применение правил (2), (6) завершает работу алгоритма

Это доказывает завершаемость алгоритма

Алгоритм унификации

Доказательство. 2. Корректность

Достаточно показать, что при применении правил (1), (3), (4), (5) всегда получается система, равносильная исходной

Для правил (1), (3), (4) это очевидно

(то есть доказать самостоятельно)

Остановимся подробно на "самом сложном" случае:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_l = s_l \end{cases} \xmapsto{(5)} \mathcal{E}' = \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_l\{x/s_j\} = s_l\{x/s_j\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны

Алгоритм унификации

Доказательство. 2. Корректность

Пусть θ — унификатор системы $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_l\theta \equiv s_l\theta \end{cases}$$

$x\theta \equiv s_j\theta$, а значит, θ — унификатор выражений x и s_j

Лемма о связке: $\{x/s_j\} \in \text{НОУ}(x, s_j)$ (т.к. $x \notin Var_{s_j}$)

Доказательство леммы о связке: $\theta = \{x/s_j\}\,\theta$

Алгоритм унификации

Доказательство. 2. Корректность

Пусть θ — унификатор системы $\mathcal{E}$; $\theta = \{x/s_j\}\,\theta$:

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_l\theta \equiv s_l\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1\{x/s_j\}\,\theta \equiv s_1\{x/s_j\}\,\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_l\{x/s_j\}\,\theta \equiv s_l\{x/s_j\}\,\theta \end{cases}$$

Следовательно, θ — унификатор системы

$$\mathcal{E}' = \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_l\{x/s_j\} = s_l\{x/s_j\} \end{cases}$$

В обратную сторону доказательство аналогично

Алгоритм унификации

Доказательство. 3. Полнота

Корректность: достаточно показать, что к последней построенной алгоритмом системе применимо одно из правил (2), (6) $\Leftrightarrow$ эта система неунифицируема

Применимо правило (2):

В системе есть уравнение $f(t_1, \ldots, t_k) = g(s_1, \ldots, s_m)$

$(f, g \in Func \cup Const,\ f \neq g)$

$f(t_1, \ldots, t_k)\theta \not\equiv g(s_1, \ldots, s_m)\theta$ для любой подстановки θ

Применимо правило (6):

В системе есть уравнение $x = s$ $\quad (x \in Var_s,\ x \not\equiv s)$

Лемма о связке: $x\theta \not\equiv s\theta$ для любой подстановки θ

Алгоритм унификации

Доказательство. 3. Полнота

Пусть теперь к последней построенной системе $\mathcal{E}'$ не применимо ни одно из правил (1)–(6)

Неприменимы правила (1), (2), (3):

В левых частях уравнений только переменные

Неприменимы правила (4), (5), (6):

Если переменная стоит в левой части уравнения,
то она содержится только в левой части этого уравнения

Значит, система является приведённой

Лемма о приведённой системе: система $\mathcal{E}'$ унифицируема

конец доказательства

Конец лекции 8