Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Весенний семестр 2016–2017 уч. г.
группы 320–328

лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса:
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)

Аудиторная нагрузка и формы контроля

Группы	Лекции	Семинары	
320–328	48 часов	16 часов	Экзамен

Контрольные	4 основных (по 2 часа) и ряд текущих
Предварительная оценка	по итогам тестов с учётом посещаемости и самостоятельной работы
Итоговая оценка	выставляется на экзамене, не больше чем предварительная + 1 балл.

Материалы

Программа курса и литература
Предварительный список вопросов
Типы задач и планы семинарских занятий
График проведения тестов-контрольных
Текущие результаты
Организация аудиторной и самостоятельной работы
Проведение экзамена и др.

`http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)`

Введение

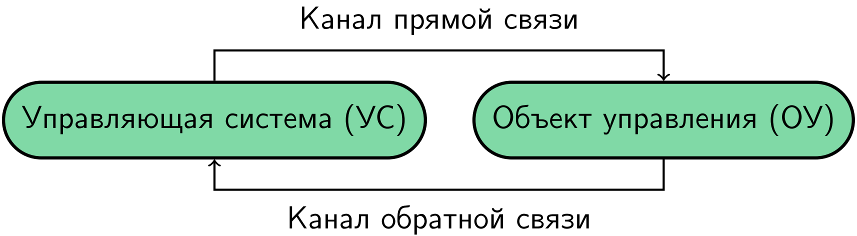
Курс «Основы кибернетики»
(ранее «Элементы кибернетики») читается с 1971 г.
Создатель и основной лектор (до 1998 г.) — чл.-корр. РАН С. В. Яблонский

Кибернетика — наука об управлении
(Н. Винер, 1948 г.)

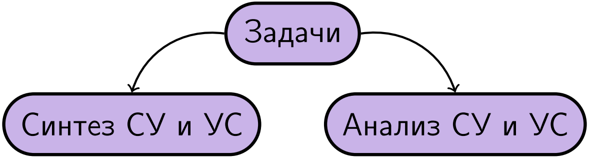
Кибернетика — наука об общих законах хранения, получения, преобразования и передачи информации в сложных системах управления
(С.В. Яблонский, 1959 г.)

Математическая кибернетика —
математические модели и методы исследования сложных систем управления

Система управления (СУ)



Функционирование СУ — круговорот информации: УС $\longrightarrow$ ОУ $\longrightarrow$ УС $\longrightarrow$ ...



Построение (синтез) СУ

Закон поведения и управляемости ОУ

Цель управления

Класс функций управления

Класс (тип) УС

Критерий качества

$\Rightarrow$

1. Выбор оптимальной функции управления из данного класса (синтез управления)
2. Построение (синтез) оптимальной УС заданного типа (программа, СБИС, механическое устройство и др.)
3. Оценка качества построенной СУ, а затем, возможно, коррекция классов и переход к п. 1

- Курс посвящён основным моделям, методам и результатам математической кибернетики, связанным с теорией дискретных управляющих систем (ДУС), задачей их анализа и синтеза
- Продолжает курс дискретной математики, использует некоторые результаты математического анализа, теории вероятностей и др.
- Является сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует систематической аудиторной и самостоятельной работы

Основные разделы курса

I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи
II. Основные классы ДУС, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования УС
III. Синтез и сложность УС
IV. Надёжность и контроль УС
V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов и классы схем, связанные с их программно-аппаратной реализацией

Основные сферы применения результатов курса

- Схемная и структурная реализация дискретных функций и алгоритмов, оценки её сложности
- Различные задачи программно-аппаратной реализации алгоритмов
- Разработка методов автоматизации проектирования заказных СБИС, программирование FPGA и др.

I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ

Утверждение 1.1. Совершенная ДНФ ФАЛ f, $f \not\equiv 0$, $f \in P_2(\boldsymbol{n})$, является единственной ДНФ от БП $X(\boldsymbol{n})$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Следствие. Совершенная ДНФ ФАЛ ℓ, $\overline{\ell}$, является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП $X(\boldsymbol{n})$.

2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

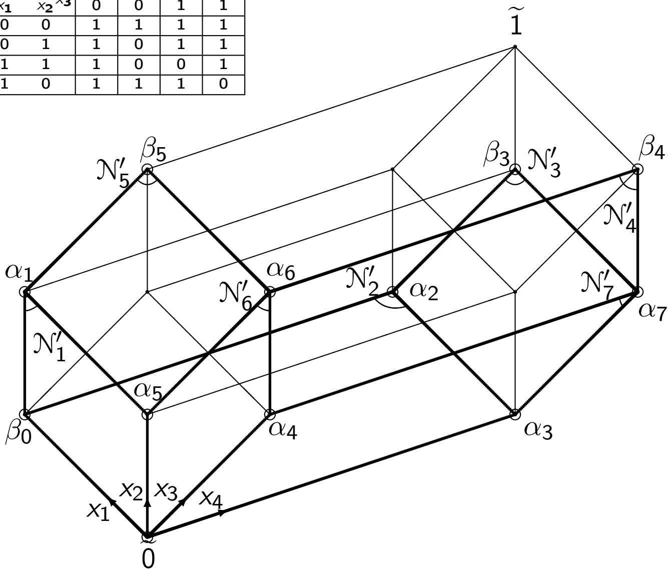
Утверждение 2.1. Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

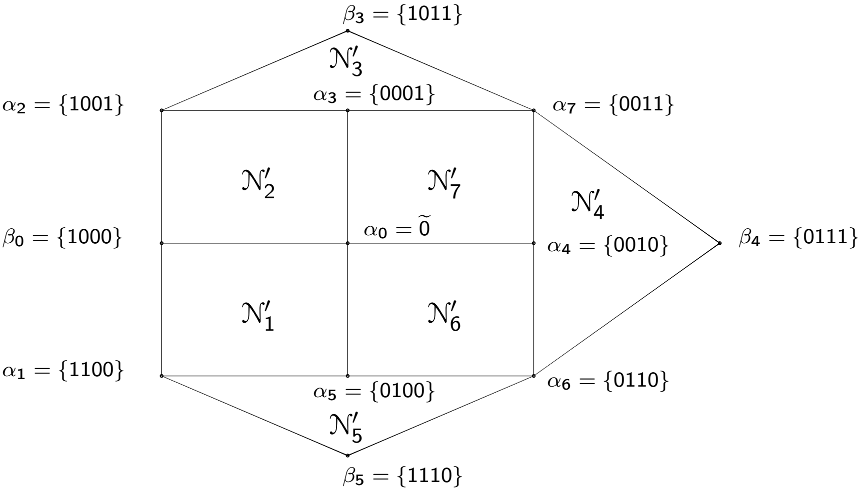
Следствие. Если ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из КНФ $\mathfrak{B}$ ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ f.

Утверждение 2.2. ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Следствие. Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

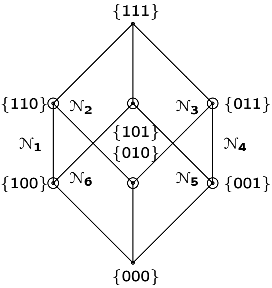
	x_4	0	1	1	0
x_1	x_2 \ x_3	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0





$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\overline{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\overline{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\overline{x}_2 x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\overline{x}_2}_{K_6}.$$



$$\overline{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$
$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$
$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$
$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee, K_4 \vee K_5,$$
$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$
$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в ДНФ сумма тупиковых, его локальность

Утверждение 3.1. Дизъюнктивная нормальная форма $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Следствие. Сокращенная ДНФ ФАЛ f является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда f — *ядровая* ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

Утверждение 3.2. Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ

Утверждение 4.1. Сокращенная ДНФ $\mathfrak{A}$ монотонной ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \ldots, x_n).$$

При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f.

Следствие. Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

Утверждение 4.2. Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы M, $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \Bigg(\bigvee_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ M\langle i,j\rangle = 1}} y_i \Bigg).$$

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.

5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о протыкающих наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ

Утверждение 5.1 Пусть для действительного γ, $0 < \gamma \leqslant 1$, в каждом столбце матрицы M, $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^{+}(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

$$\text{где } \ln^{+} x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geqslant 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Утверждение 5.2 При любых натуральных n и m, $m \leqslant n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m.

6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ

Утверждение 6.1 Для любого $n, n \in \mathbb{N}$, имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Утверждение 6.2 Для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leqslant \frac{3}{4} 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right),$$

$$R(f) \leqslant \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right).$$

7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных

Утверждение 7.1 Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geqslant 4$, вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \cdots \oplus x_n),$$

где $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Следствие

$$\tau(n) \geqslant 5^{2^{n-4}}, \quad \mu(n) \geqslant 2^{2^{n-4}}.$$

Утверждение 7.2

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geqslant e_1 \frac{3^n}{n},$$

где e_1 — некоторая константа.

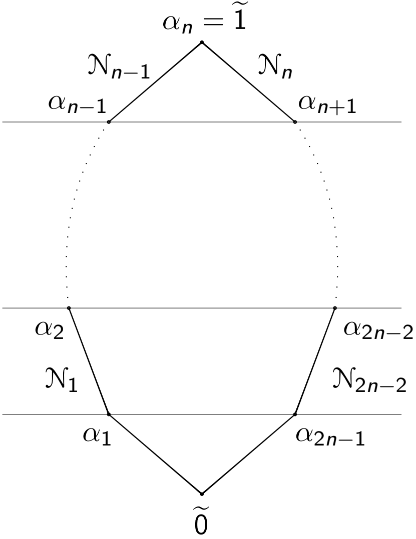


Рис.: цепная ФАЛ длины $(2n-2)$ в кубе B^n

Утверждение 7.3 При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Замечание 1 Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣM не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣT.

Замечание 2 Известно, что при $n \geqslant 14$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ четной длины t, $t \geqslant 2^{n-11} - 4$, на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка $(\frac{t}{2} - 2)$.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

8. Формулы и способы их задания, эквивалентность формул и функционалы их сложности. Оптимизация подобных формул по глубине

Утверждение 8.1 Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \leqslant L(\mathcal{F}) + 1 \leqslant 2^{D(\mathcal{F})},$$

где $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$ — число ФС & и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Следствие

$$D(\mathcal{F}) \geqslant \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil.$$

Утверждение 8.2 Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^{\Phi}$ существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{F}}$ такая,что

$$D\left(\check{\mathfrak{F}}\right) \leqslant \lceil \log\left(L\left(\mathcal{F}\right) + 1\right)\rceil + \mathrm{Alt}\ \left(\mathcal{F}\right).$$

Следствие 1. Для любой ЭК или ЭД K существует подобная ей формула $\check{K}$ такая, что
$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$
которая, минимальна по глубине.

Следствие 2. Для любой ДНФ или КНФ $\mathfrak{A}$ существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что
$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leqslant \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

9. Схемы из функциональных элементов и операции их приведения. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 9.1 Для приведенной СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{C}$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leqslant L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \leqslant L(\Sigma) + 1 \leqslant 2^{D(\Sigma)},$$

где $L_{\&,\vee}$ — число ФЭ & и $\vee$ в Σ.

Утверждение 9.2 Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства

$$\left|\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)\right| \leqslant (10n)^{L+1},$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)\right\| \leqslant (8n)^{L+1},$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}[D,n]\right\| \leqslant (8n)^{2^D}.$$

Следствие Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями ранга R от БП $x_1, \ldots, x_n$ не больше, чем $(12n)^R$.

Утверждение 9.3 Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)\right\| \leqslant (8(L+n))^{L+1}.$$

10. Контактные схемы и π-схемы, моделирование формул и π-схем. Оценка числа контактных схем и π-схем, особенности функционирования многополюсных схем

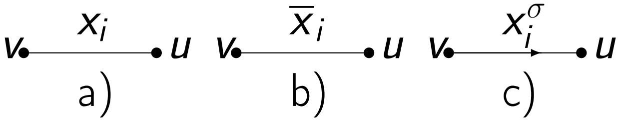


Рис.: типы контактов

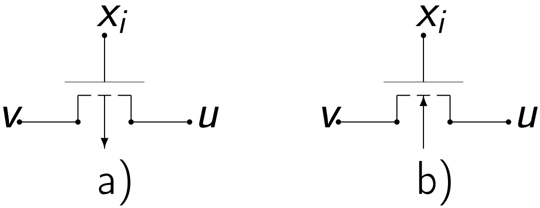


Рис.: физическая интерпретация контактов

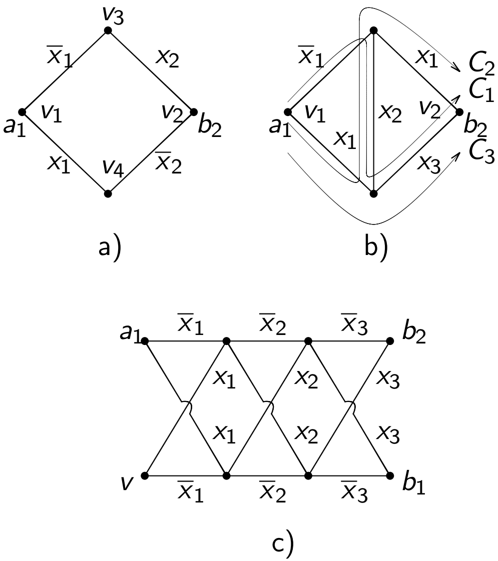


Рис.: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Утверждение 10.1 Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Утверждение 10.2 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^{\pi}(L, n)\| \leqslant (12n)^{L}.$$

Утверждение 10.3 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L,n)\right\| \leqslant (8nL)^{L}.$$

11 Эквивалентные преобразования формул с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

$$
\begin{aligned}
\tau^{\text{осн}} &= \left\{ t^{\mathrm{M}}_{\&},\ t^{\mathrm{M}}_{\neg},\ t^{\mathrm{A}}_{\&},\ t^{\mathrm{K}}_{\&},\ t^{\mathrm{O\Pi}}_{\&},\ t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{1,\&},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{0,\&} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{A}} &= \left\{ t^{\mathrm{A}}_{\&},\ t^{\mathrm{A}}_{\vee} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{K}} &= \left\{ t^{\mathrm{K}}_{\&},\ t^{\mathrm{K}}_{\vee} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{O\Pi}} &= \left\{ t^{\mathrm{O\Pi}}_{\&},\ t^{\mathrm{O\Pi}}_{\vee} \right\}, \\
\tau^{\mathrm{D}} &= \left\{ t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee},\ t^{\mathrm{D}}_{\vee,\&} \right\}, \\
\tau^{\Pi\mathrm{K}} &= \left\{ t^{\Pi\mathrm{K}}_{0,\&},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{1,\&},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{0,\vee},\ t^{\Pi\mathrm{K}}_{1,\vee} \right\}, \\
\widetilde{\tau}^{\text{осн}} &= \left\{ \tau^{\mathrm{M}},\ \tau^{\mathrm{A}},\ \tau^{\mathrm{K}},\ \tau^{\mathrm{O\Pi}},\ \tau^{\mathrm{D}},\ \tau^{\Pi\mathrm{K}},\ t^{\Pi} \right\}.
\end{aligned}
$$

Утверждение 11.1 Система $\widetilde{\mathcal{T}}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\mathcal{T}^{\text{осн}}$.

Утверждение 11.2 Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\mathcal{T}^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Утверждение 11.3 Система $\mathcal{T}^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.

12. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

Утверждение 12.1 Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{Б}$, то $\left\{\underline{\tau},\ \tau^{\mathrm{C}},\ \tau^{\mathrm{B}}\right\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{Б}$

Следствие Система тождеств $\left\{\underline{\tau}^{\text{осн}},\ \tau^{\mathrm{B}},\ \tau^{\mathrm{C}}\right\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$.

Утверждение 12.2 Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса Б к базису Б$'$ и от базиса Б$'$ к базису Б соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$.

Следствие Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ указанным в утверждении способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе Б.

13. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств

Утверждение 13.1 Имеет место выводимость $\{t_1 — t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \models\!\!\!\Rightarrow \{t_7 — t_{11}\}$.

Утверждение 13.2 При $n \geqslant 2$ имеет место выводимость $\tau_n \models\!\!\!\Rightarrow \tau^{(n)}$.

14. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Утверждение 14.1 Для любой КС Σ, где $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{U}^{\mathrm{K}}$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}$.

Утверждение 14.2 Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \underset{\tau_n}{\Longrightarrow} \Sigma''$.

Следствие Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ от БП $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$.

Утверждение 14.3 Если $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\rightrightarrows} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, где $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k}.

Утверждение 14.4 В классе $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ не существует конечной полной системы тождеств.

III. Синтез и сложность управляющих систем

15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций

Утверждение 15.1 Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1, \qquad L(\Sigma_f) \leqslant n\,|N_f|\,,$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leqslant \lceil \log(n \cdot |N_f|) \rceil + 2.$$

Следствие 1. В силу указанных неравенств, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой сложности 2, а также формулой из $\mathcal{U}^{\Phi}$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства

$$L^{\mathrm{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^{\mathrm{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

Следствие 2.

$$D(n) \leqslant n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Утверждение 15.2 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2,$$
$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Следствие

$$L^{\pi}(n) \leqslant 2^{n+1} - 2,$$
$$L^{\Phi}(n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 4.$$

Функции, встречающиеся в приложениях:

1. линейная ФАЛ порядка n, то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\overline{\ell}_n$;
2. мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n;
3. дешифратор $\overrightarrow{Q}_n$ (дизъюнктивный дешифратор $\overrightarrow{J}_n$) порядка n;
4. универсальная система $\overrightarrow{P}_2(n)$ порядка n, состоящая из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Утверждение 15.3 Для любого натурального n в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{C}}$ существует универсальная СФЭ порядка n, сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Следствие

$$L_{\text{Б}}^{\text{C}}(\overrightarrow{P}_2(n)) \leqslant 2^{2^n} - n.$$

16. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем

Утверждение 16.1 Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n - 1, \qquad L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n.$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i, $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n \qquad (\text{соответственно } L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n+k).$$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \geqslant n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\ell_n) \geqslant 2n,$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^n + n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\mu_n) \geqslant 2^n + 2n.$$

Утверждение 16.2 Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant m \qquad (\text{соответственно} L^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(F) \geqslant m).$$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - n, \quad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - 2$$

Замечание В силу следствия универсальная СФЭ U_n, построенная в утв. 15.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$.

Утверждение 16.3 Если для существенной БП x_n ФАЛ $f \in P_2(n)$, и для любого σ, $\sigma \in B$, ФАЛ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то

$$L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(f) \geqslant \min\{L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=0}), L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=1})\} + 2.$$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^{n+1} + n - 1,$$
$$D(\mu_n) \geqslant n + 2.$$

Утверждение 16.4 Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} \left| N_{f_j} \right| .$$

Следствие $L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \geqslant 2^{n+1} - 2$

Утверждение 16.5 Для любого натурального $\boldsymbol{n}$ выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \leqslant 4n - 4, \quad L^{\mathrm{C}}(\bar{\ell}_n) \leqslant 4n - 4 + \lfloor 1/n \rfloor\,;$$
$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^{\Phi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+2} - 3;$$
$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}),\ L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^{n+1} - 2;$$
$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}).$$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n.$$

17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

Утверждение 17.1. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда

$$F \geqslant F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Следствие 1. В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ, $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС Σ', реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ'.

Следствие 2. Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Замечание. Отождествление входов (выходов) у разделительной по входам (выходам) КС дает разделительную по рассматриваемой группе полюсов КС.

18. Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона

Утверждение 18.1 Если $(1, m)$-ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \ldots, f'_m)$, то существует $(1, m)$-ККС Σ'', которая реализует систему ФАЛ $\overline{F}' = \left(\overline{f}'_1, \ldots, \overline{f}'_m\right)$ и для которой $L(\Sigma'') \leqslant 2L(\Sigma')$.

Утверждение 18.2 Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{K}}(\ell_n^\sigma) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \; L^{\mathrm{K}}\big(\overrightarrow{P}_2(n)\big) \leqslant 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^{n+2} - 6.$$

Утверждение 18.3 Для функций Шеннона $L^{\mathrm{K}}(n)$ и $L^{\mathrm{C}}(n)$ выполнены соотношения:

$$L^{\mathrm{K}}(n) \lesssim 4\frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{C}}(n) \lesssim 8\frac{2^n}{n}.$$

19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для ФАЛ из специальных классов

Утверждение 19.1 Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, \ldots, 4$, и $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\varepsilon_i(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon_i(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant \Big(1 - \varepsilon_1(n)\Big)\frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant \Big(1 + \varepsilon_2(n)\Big)\frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(f) \geqslant \Big(1 - \varepsilon_3(n)\Big)\frac{2^n}{\log n}, \quad D(f) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon_4(n).$$

Следствие

$$D(n) \geqslant \lceil n - \log\log n - o(1) \rceil,$$

$$L^{\mathrm{C}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

Утверждение 19.2

Для класса ФАЛ $\mathcal{Q}$ такого, что

$$n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right)$$
$$(\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|)),$$

выполняются асимптотические неравенства

$$L^{\mathrm{C}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}$$

(соответственно $\quad L^{\mathrm{K}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \dfrac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}$).

20. Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 20.1 Для любых натуральных p, m и s, где $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s, которое является ДУМ ранга p и для которого:

1) $\lambda = |G| \leqslant p2^s$;
2) система из p характеристических ФАЛ $\psi_1, \ldots, \psi_p$ ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, и соответствующих ФАЛ $g_1, \ldots, g_p$ из G справедливы представления

$$g = g_1 \vee \cdots \vee g_p = \psi_1 g_1 \vee \cdots \vee \psi_p g_p.$$

Утверждение 20.2 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, такая, что

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{5\log n + O(1)}{n}\right).$$

Следствие. Из этого утверждения с учетом следствия из утверждения 20.1 вытекает, что

$$L^{\mathrm{C}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

21. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Утверждение 21.1 Для любых натуральных m, λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с ее отрицанием.

Замечание. Если в условиях утверждения $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j-1)$, то $g_i \equiv x_{i+m}^{\overline{\alpha_j}}$ на δ_j.

Утверждение 21.2 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, в $\mathcal{U}^\Phi$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n}\right),$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leqslant n - \log\log n + O(1).$$

Следствие. Из этих оценок с учетом нижних оценок следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad D(n) \leqslant n - \log\log n + O(1).$$

22. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых специальных классов

Утверждение 22.1 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Следствие. Из этой оценки с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

23. Синтез схем для дешифраторов, мультиплексоров и некоторых других ФАЛ, встречающихся в приложениях, оценки их сложности.

Утверждение 23.1 Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняются неравенства

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

Следствие. Оценки утверждения 23.1 и следствия из следствия из утверждений 16.2, 16.4 дают асимптотические равенства

$$L^{\mathsf{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \sim 2^n, \qquad L^{\mathsf{K}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

Утверждение 23.2 Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(2^n/n\right),$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(2^n/n\right),$$
$$D(\mu_n) \leqslant n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ μ_n и бесповторная по информационным БП формула $\mathcal{M}_n$ с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

Следствие. Из полученных оценок в силу следствий из утверждения 16.3 вытекает, что

$$L^{C}(\mu_n) \sim 2^{n+1}, \qquad D(\mu_n) = n + O(1).$$

Утверждение 23.3 Для монотонной симметрической ФАЛ $s_n^{2,n}$ с порогом 2 при $n \geqslant 2$ выполняются неравенства:

$$2n - 3 \leqslant L^{\mathrm{C}}(s_n^{[2,n]}) \leqslant 2n + O(\sqrt{n}).$$

Следствие.

$$L^{\mathrm{C}}(s_n^{[2,n]}) \sim 2n.$$

24. Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста

Утверждение 24.1 Функция теста $f(y_1, \ldots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ

$$f(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{(i,j)\in\mathcal{N}} \left(\bigvee_{\substack{1\leqslant t\leqslant p \\ M<t,i>\neq M<t,j>}} y_t \right)$$

Следствие. Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1}\cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1,\ldots,y_p)$, получающаяся из этой КНФ в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T=\{t_1,\ldots,t_r\}$ и обратно.

Утверждение 24.2 Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s-1)$.

Утверждение 24.3 Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ и $p(s)$ — целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента s, для которых

$$t(s) = \lceil 2\log s \rceil + \varphi(s), \quad p(s) \geqslant t(s),$$
$$\varphi(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Следствие Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ длина минимального диагностического теста не больше, чем $2\log s + \varphi(s)$.

25. Самокорректирующиеся контактные схемы и методы их посторoения. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, корректирующих один обрыв (одно замыкание)

Утверждение 25.1 Для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ', $\Sigma' \in \mathcal{U}^K_{(p,q)}$, для которой

$$L(\Sigma') \leqslant (p+1)(q+1)L(\Sigma)$$

Утверждение 25.2 Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1,0)$- и $(0,1)$-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma), \quad L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma)$$

Утверждение 25.3 Для $n = 1, 2, \ldots$ имеют место следующие асимптотические равенства:

$$L^K_{(1,0)}(n) \sim L^K_{(0,1)}(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

Утверждение 25.4 Для $n = 1, 2, \ldots$ имеют место равенства

$$L^K_{(1,0)}\left(\ell_n\right) = L^K_{(1,0)}\left(\overline{\ell}_n\right) = 4n.$$