Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Лекция 6

Общая схема метода резолюций

Равносильные формулы

Теорема о равносильной замене

Предварённая нормальная форма

Сколемовская стандартная форма

Системы дизъюнктов

Напоминание

Мы умеем решать

проблему общезначимости формул логики предикатов

$$\models \varphi?$$

с помощью метода семантических таблиц

Но этот метод оказался **неэффективным**:

- приходится перебирать много формул
- и подставлять много термов

Есть более эффективный способ проверки общезначимости:

метод резолюций

Общая схема метода резолюций

$$\models \varphi?$$

$$\varphi \rightsquigarrow \psi \rightsquigarrow \psi_{pnf} \rightsquigarrow \psi_{ssf} \rightsquigarrow S_\varphi \rightsquigarrow \text{вывод } \square$$

$\psi = \neg\varphi$

$\psi_{pnf} = \overset{\forall}{\exists}\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$ — формула в предварённой нормальной форме $\qquad (D_i = L_1 \vee \cdots \vee L_k)$

$\psi_{ssf} = \forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$ — формула в сколемовской стандартной форме

$S_\varphi = \{D_1, \ldots, D_k\}$ — система дизъюнктов

$\square$ — пустой дизъюнкт (тождественно ложный)

$$\begin{aligned}
\models \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \psi \text{ противоречива} \\
&\Leftrightarrow \quad \psi_{pnf} \text{ противоречива} \\
&\Leftrightarrow \quad \psi_{ssf} \text{ противоречива} \\
&\Leftrightarrow \quad S_\varphi \text{ противоречива} \\
&\Leftrightarrow \quad \square \text{ резолютивно выводим}
\end{aligned}$$

Общая схема метода резолюций

$$\models \varphi?$$

$$\varphi \rightsquigarrow \psi \rightsquigarrow \psi_{pnf} \rightsquigarrow \psi_{ssf} \rightsquigarrow S_\varphi \rightsquigarrow \text{вывод } \square$$

$\psi = \neg\varphi$

$\psi_{pnf} = \overset{\forall}{\exists}\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$ — формула в предварённой нормальной форме $\qquad (D_i = L_1 \vee \cdots \vee L_k)$

$\psi_{ssf} = \forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$ — формула в сколемовской стандартной форме

$S_\varphi = \{D_1, \ldots, D_k\}$ — система дизъюнктов

$\square$ — пустой дизъюнкт (тождественно ложный)

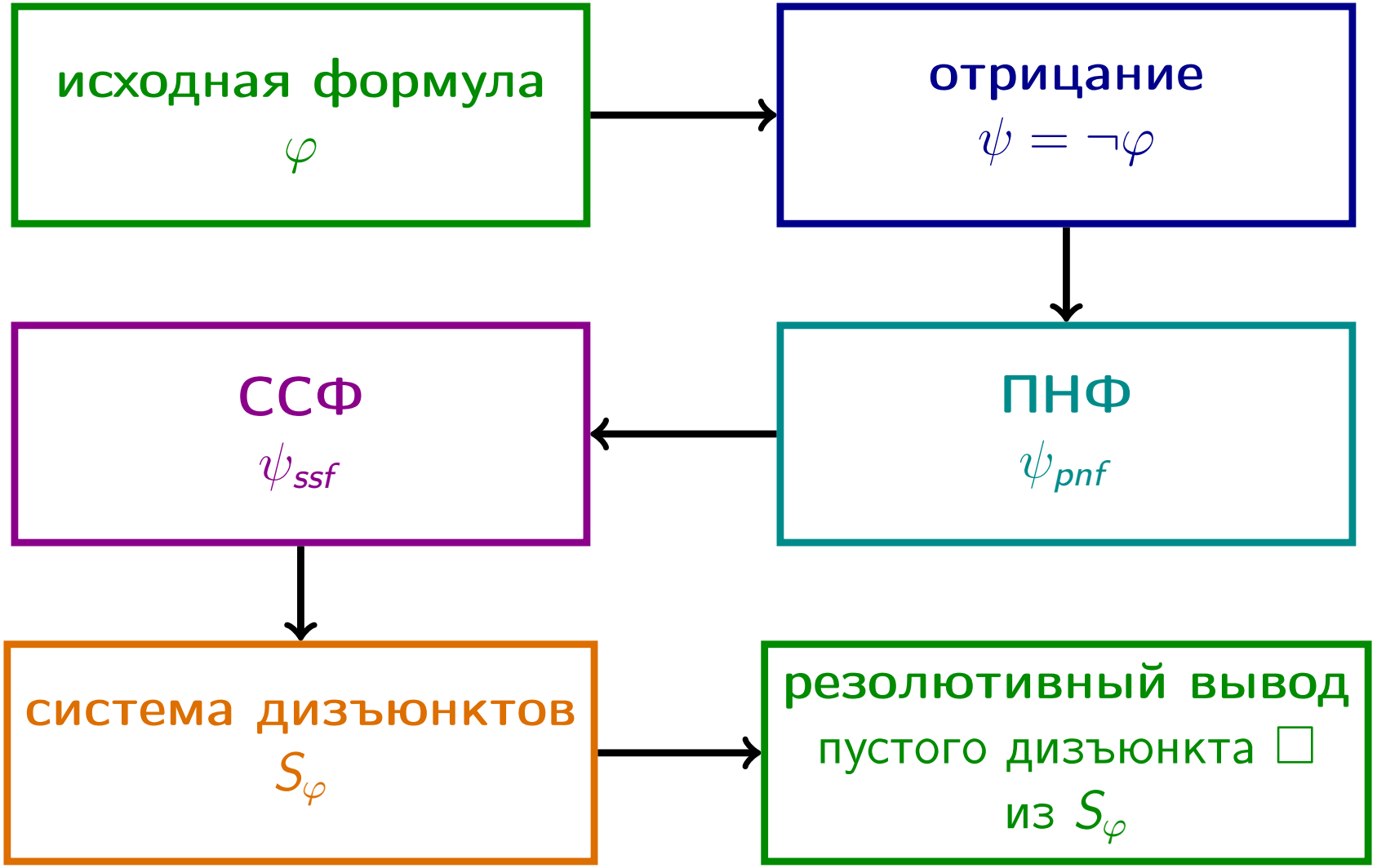
Как выводится $\square$? **Например:**

$\dfrac{L,\ \neg L}{\square}$ — при встрече **явного противоречия**

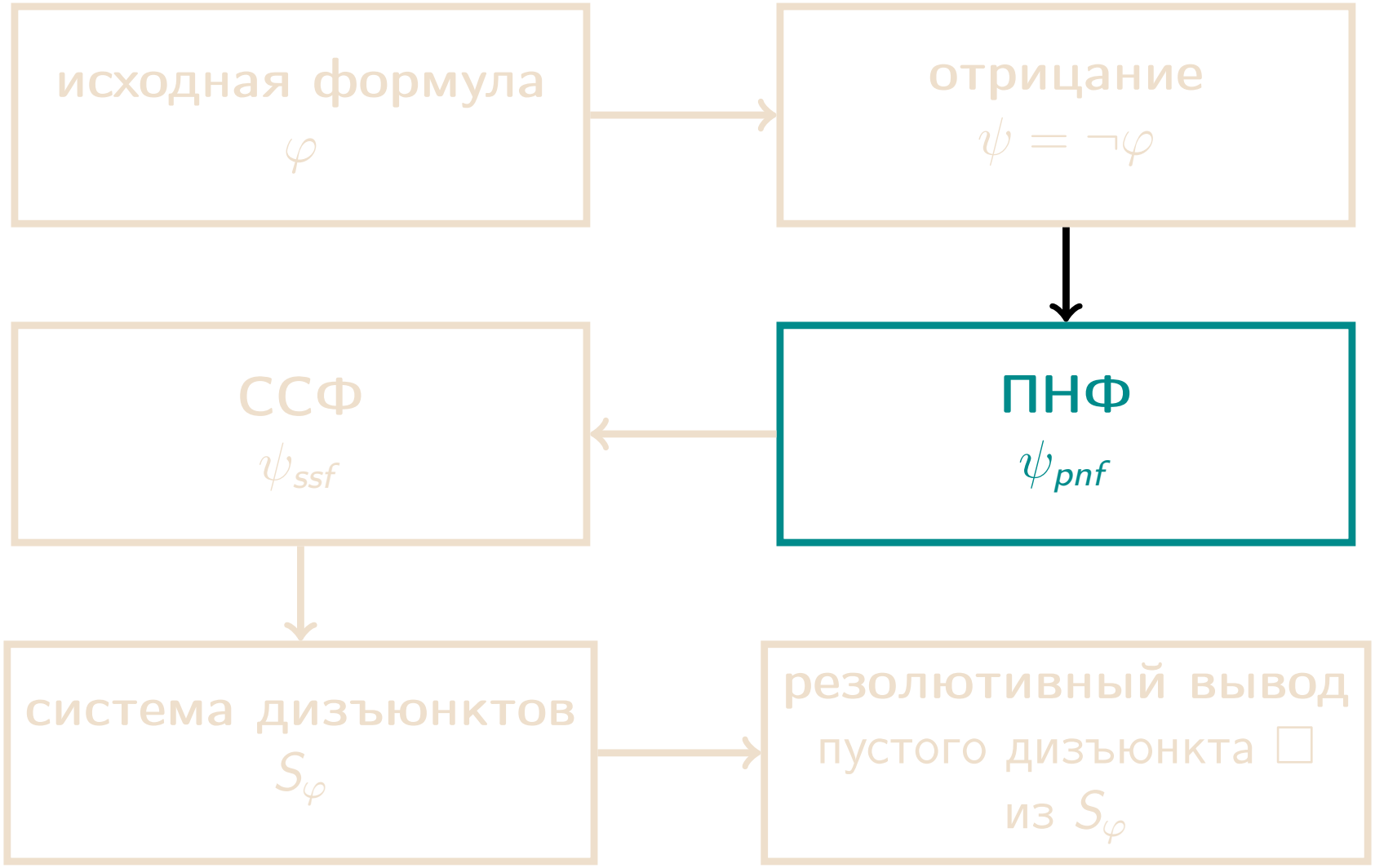
$\dfrac{D' \vee L, D'' \vee \neg L}{D' \vee D''}$ — пример применения правила резолюции

Итог: $\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ из S_φ резолютивно выводим $\square$

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Равносильные формулы

Как можно преобразовать формулу, не меняя её смысла?

Равносильность (логическая связка):

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ — это сокращение для } (\varphi \to \psi)\,\&(\psi \to \varphi)$$

Формулы φ, ψ равносильны ($\varphi \approx \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Утверждение

$\approx$ — отношение эквивалентности

Утверждение

Если формула φ общезначима (выполнима) [невыполнима] и $\varphi \approx \psi$, то формула ψ также общезначима (выполнима) [невыполнима]

Доказательство. Самостоятельно

Равносильные формулы

Примеры равносильных формул

1. *Законы булевой алгебры*

$\varphi \overset{\&}{\vee} \psi \approx \psi \overset{\&}{\vee} \varphi$ (коммутативность $\begin{smallmatrix}\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}\end{smallmatrix}$)

$(\varphi \overset{\&}{\vee} \psi) \overset{\&}{\vee} \chi \approx \varphi \overset{\&}{\vee} (\psi \overset{\&}{\vee} \chi)$ (ассоциативность $\begin{smallmatrix}\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}\end{smallmatrix}$)

$\varphi \overset{\&}{\vee} (\psi \overset{\vee}{\&} \chi) \approx (\varphi \overset{\&}{\vee} \psi) \overset{\vee}{\&} (\varphi \overset{\&}{\vee} \chi)$

(дистрибутивность $\begin{smallmatrix}\text{дизъюнкции}\\ \text{конъюнкции}\end{smallmatrix}$ относительно $\begin{smallmatrix}\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}\end{smallmatrix}$)

$\varphi \overset{\&}{\vee} \varphi \approx \varphi$ (идемпотентность $\begin{smallmatrix}\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}\end{smallmatrix}$)

$\neg\neg\varphi \approx \varphi$ (инволютивность отрицания)

$\neg(\varphi \overset{\&}{\vee} \psi) \approx \neg\varphi \overset{\vee}{\&} \neg\psi$ (законы де Моргана)

$\varphi \to \psi \approx \neg\varphi \vee \psi$ (удаление импликации)

$\ldots$

Равносильные формулы

Примеры равносильных формул

2. *Правила работы с кванторами*

$$\substack{\forall\\ \exists}\mathtt{x}\ \varphi \approx \substack{\forall\\ \exists}\mathtt{y}\ (\varphi\,\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\})$$ (переименование переменных)

(если φ не содержит вхождений $\mathtt{y}$)

$$\neg\substack{\forall\\ \exists}\mathtt{x}\ \varphi \approx \substack{\exists\\ \forall}\mathtt{x}\ \neg\varphi$$ (продвижение отрицания)

$$\substack{\forall\\ \exists}\mathtt{x}\ \varphi \,\&\, \psi \approx \substack{\forall\\ \exists}\mathtt{x}\ (\varphi \,\&\, \psi)$$ (вынесение кванторов)

$$\substack{\forall\\ \exists}\mathtt{x}\ \varphi \vee \psi \approx \substack{\forall\\ \exists}\mathtt{x}\ (\varphi \vee \psi)$$

(если ψ не содержит свободных вхождений $\mathtt{x}$)

Доказательство равносильностей. Очевидно

(например, методом семантических таблиц)

Равносильные формулы

$\varphi\,[\![\psi]\!]$ — синоним φ, если формула φ содержит подформулу ψ

$\varphi\,[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся заменой некоторых вхождений подформулы ψ на χ

Теорема о равносильной замене

$$\psi \approx \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi\,[\![\psi]\!] \approx \varphi\,[\![\psi/\chi]\!]$$

Доказательство. Индукция по числу операций в φ

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно

Индуктивный переход.

Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \forall \mathtt{x}\ \varphi'\,[\![\psi]\!]$$

Остальные случаи аналогичны

Равносильные формулы

Доказательство. *Индуктивный переход.*
Утверждение: $\forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi]\!] \approx \forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi/\chi]\!]$
Индуктивное предположение: $\varphi'\ [\![\psi]\!] \approx \varphi'\ [\![\psi/\chi]\!]$, то есть

для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любых предметов d, $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi'\ [\![\psi]\!] \to \varphi'\ [\![\psi/\chi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\varphi'\ [\![\psi/\chi]\!] \to \varphi'\ [\![\psi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi'\ [\![\psi]\!] \to \varphi'\ [\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi'\ [\![\psi/\chi]\!] \to \varphi'\ [\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Лекция 4: $\models \forall \mathtt{x}\ (A \to B) \to (\forall \mathtt{x}\ A \to \forall \mathtt{x}\ B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi/\chi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi]\!] \approx \forall \mathtt{x}\ \varphi'\ [\![\psi/\chi]\!]$ ▼

Равносильные формулы

Зачем нужна равносильная замена?

Чтобы уметь изменять (*например, упрощать*) формулу, полностью сохраняя её смысл

Пример

$$\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$$

$$\approx \qquad \exists x\, \varphi \approx \exists y\, (\varphi\{x/y\})$$

$$\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$$

$$\approx \qquad \varphi \to \psi \approx \neg\varphi \vee \psi$$

$$\neg\forall x\, P(x) \vee \exists y\, P(y)$$

$$\approx \qquad \neg\forall x\, \varphi \approx \exists x\, \neg\varphi$$

$$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, P(y)$$

$$\approx \qquad \exists x\, \varphi \vee \psi \approx \exists x\, (\varphi \vee \psi); \qquad \varphi \vee \psi \approx \psi \vee \varphi$$

$$\exists x\, \exists y\, (\neg P(x) \vee P(y))$$

$$\approx \qquad \varphi \to \psi \approx \neg\varphi \vee \psi$$

$$\exists x\, \exists y\, (P(x) \to P(y))$$

Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 \mathtt{x}_1 \ \ldots Q_n \mathtt{x}_\mathtt{n}}_{\text{кванторная приставка}} \ \underbrace{(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)}_{\text{матрица}}$$

- $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- матрица — это бескванторная формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
  - $D_i = L_1^i \vee \cdots \vee L_{m_i}^i$ — множитель
  - L_j^i — литера: атом или его отрицание

Наряду с “находится в ПНФ” будем говорить “является ПНФ”

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u\ (P(x)\ \&\ \neg R(x,u)\ \&(\neg P(y) \vee R(x,z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- кванторная приставка: $\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u$
- матрица: $P(x)\ \&\ \neg R(x,u)\ \&(\neg P(y) \vee R(x,z))$
  - множители: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y) \vee R(x,z)$
  - литеры: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y)$, $R(x,z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

Опишем, как можно по замкнутой формуле φ получить равносильную ей ПНФ φ_{pnf} **с помощью равносильных преобразований**

Обозначим этапы преобразования формулы и проиллюстрируем их на примере:

$$\varphi : \neg\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

1. *Переименование переменных* $\quad (\overset{\forall}{\exists}\mathtt{x}\ \varphi \approx \overset{\forall}{\exists}\mathtt{y}\ \varphi\,\{\mathtt{x}/y\})$

$$\neg\exists\mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\forall\mathtt{x}\ \mathrm{P}(\mathtt{x}) \to \exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \to \exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists\mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\forall\mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z}) \to \exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \to \exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists\mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\forall\mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z}) \to \exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \to \exists\mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

Результат:

различными кванторами связаны различные переменные

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

2. *Удаление импликаций* $(\psi \to \chi \approx \neg\psi \vee \chi)$

$$\neg\exists \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&(\forall \mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z}) \to \exists \mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \to \exists \mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&(\neg\forall \mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z}) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \to \exists \mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists \mathtt{x}\ (\neg(\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&(\neg\forall \mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z}) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))) \vee \exists \mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

Результат:

формула не содержит импликаций

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

3. *Продвижение отрицаний*

$$(\neg\overset{\forall}{\exists}\mathtt{x}\ \varphi \approx \overset{\exists}{\forall}\mathtt{x}\ \neg\varphi;\ \neg(\psi\overset{\&}{\vee}\chi) \approx \neg\psi\overset{\vee}{\&}\neg\chi;\ \neg\neg\psi \approx \psi)$$

$$\neg\exists\mathtt{x}\ (\neg(\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\neg\forall\mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z})\vee\exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))\vee\exists\mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

$$\approx$$

$$\forall\mathtt{x}\ \neg(\neg(\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\neg\forall\mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z})\vee\exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))\vee\exists\mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

$$\approx$$

$$\forall\mathtt{x}\ (\neg\neg(\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\neg\forall\mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z})\vee\exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))\,\&\,\neg\exists\mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

$$\approx$$

$$\forall\mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\neg\forall\mathtt{z}\ \mathrm{P}(\mathtt{z})\vee\exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))\,\&\,\neg\exists\mathtt{u}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

$$\approx$$

$$\forall\mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\,\&(\exists\mathtt{z}\ \neg\mathrm{P}(\mathtt{z})\vee\exists\mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))\,\&\,\forall\mathtt{u}\ \neg\mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

Результат:

отрицания стоят только над атомарными формулами

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

4. *Вынесение кванторов* $\left(\overset{\forall}{\exists}\mathtt{x}\ \varphi \overset{\&}{\vee} \psi \approx \overset{\forall}{\exists}\mathtt{x}\ (\varphi \overset{\&}{\vee} \psi);\ \varphi \overset{\&}{\vee} \psi \approx \psi \overset{\&}{\vee} \varphi\right)$

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&(\exists \mathtt{z}\ \neg \mathrm{P}(\mathtt{z}) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))\ \&\ \forall \mathtt{u}\ \neg \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$
$$\approx$$
$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&\exists \mathtt{z}\ (\neg \mathrm{P}(\mathtt{z}) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))\ \&\ \forall \mathtt{u}\ \neg \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$
$$\approx$$
$$\forall \mathtt{x}\ (\exists \mathtt{z}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&(\neg \mathrm{P}(\mathtt{z}) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))\ \&\ \forall \mathtt{u}\ \neg \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$
$$\approx$$
$$\forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{z}\ \exists \mathtt{y}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&(\neg \mathrm{P}(\mathtt{z}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))\ \&\ \neg \mathrm{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}))$$

Результат:

все кванторы собраны в **кванторную приставку**

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

5. *Получение КНФ* (законы булевой алгебры)

$$\forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{z}\ \exists \mathtt{y}\ \forall \mathtt{u}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x})\ \&(\neg \mathrm{P}(\mathtt{z}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))\ \&\ \neg \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u}))$$

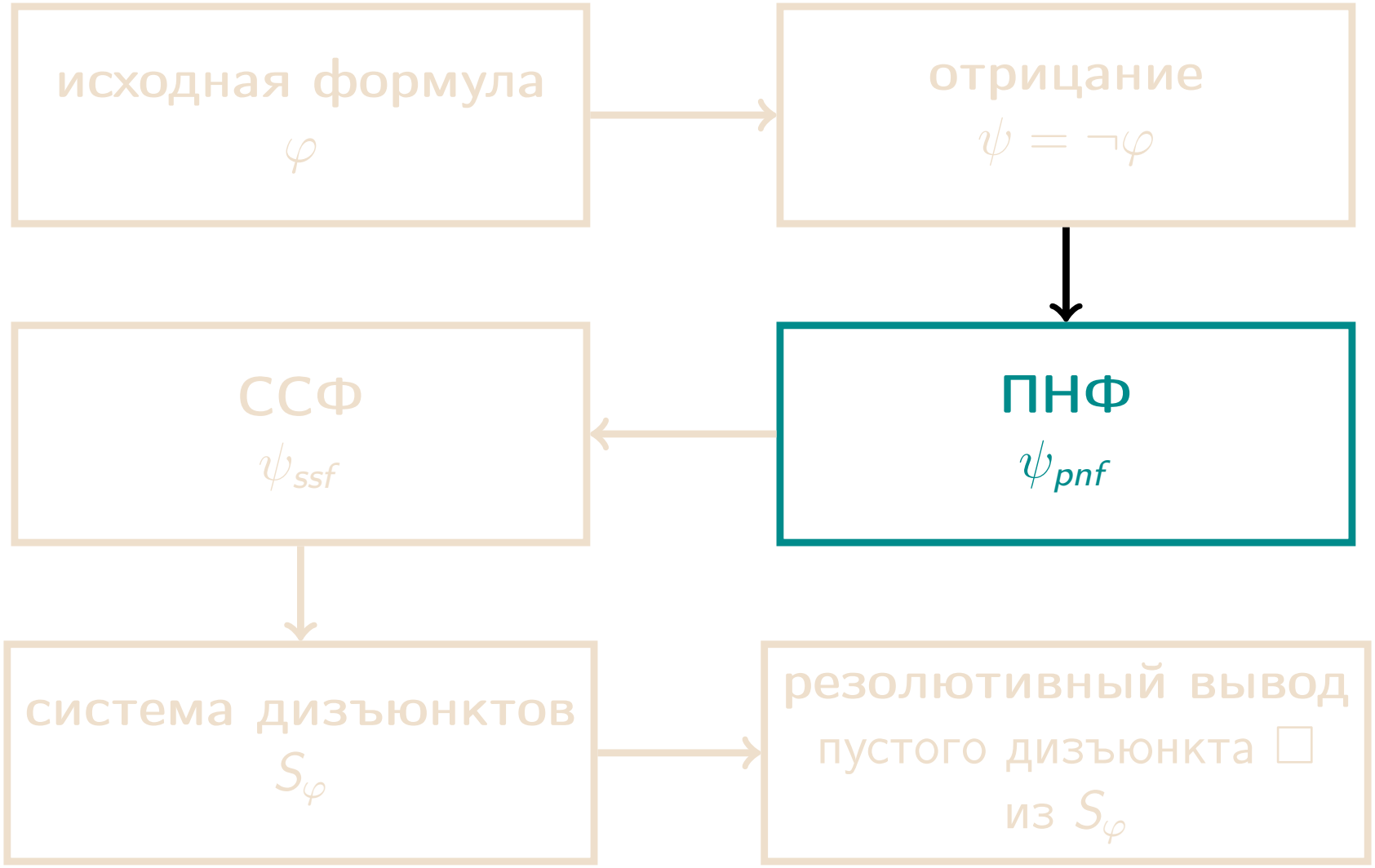
Приводить бескванторную формулу к КНФ — это просто

В этом примере под кванторной приставкой уже расположена КНФ

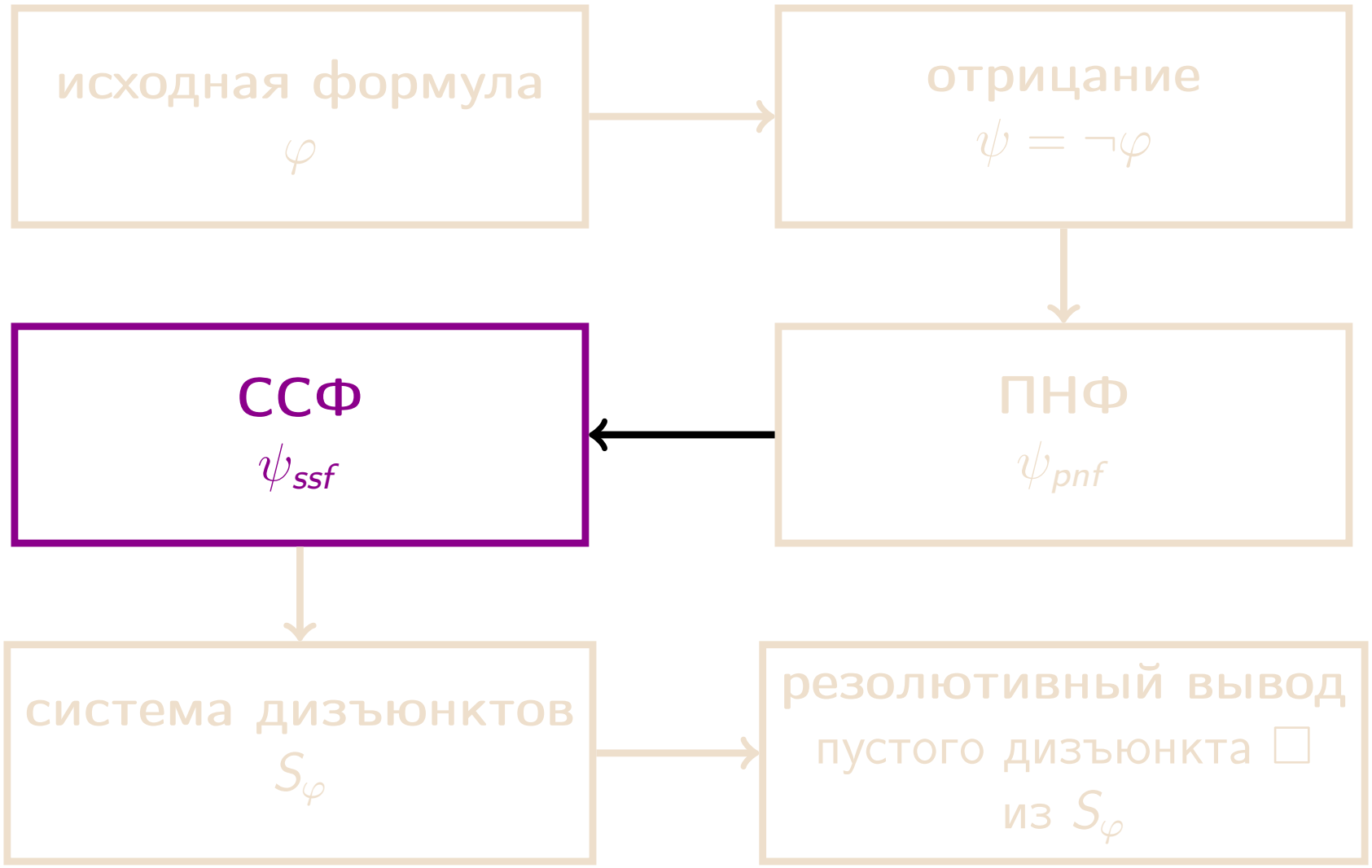
Результат:

получена предварённая нормальная форма, равносильная φ ▼

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула находится в сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}} \, (D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$$

Например, формула

$$\forall \mathtt{x} \, \forall \mathtt{u} \, (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \,\&\, (\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathtt{x})) \vee \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathbf{g}(\mathtt{x}))) \,\&\, \neg \mathrm{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u}))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с “находится в ССФ” будем говорить “является ССФ”

А можно ли удалить все кванторы $\exists$ в ПНФ, сохранив её выполнимость (или невыполнимость)?

Сколемовская стандартная форма

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\ \chi$ **— замкнутая формула** ($n \geq 0$) **и функциональный символ** $\mathbf{f}$ **<u>не содержится</u> в** χ**. Тогда**

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{выполнима формула}$$
$$\psi : \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \left(\chi\left\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\right\}\right)$$

Доказательство леммы.

($\Leftarrow$): Пусть $\mathcal{I}$ — модель для ψ

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models \chi\left\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\right\}[\widetilde{d}^n]$$

Рассмотрим предмет $d_{n+1} = \bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n)$

Будет верно следующее: $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

Значит, $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\ \chi)[\widetilde{d}^n]$, и $\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\ \chi$

Сколемовская стандартная форма

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\ \chi$ **— замкнутая формула** ($n \geq 0$) **и функциональный символ** $\mathbf{f}$ **<u>не содержится</u> в** χ**. Тогда**

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{выполнима формула}$$
$$\psi : \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \left(\chi\left\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\right\}\right)$$

Доказательство леммы.

($\Rightarrow$): Пусть $\mathcal{I}$ — модель для φ

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ существует предмет d_{n+1}, такой что $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

По $\mathcal{I}$ построим **новую** интерпретацию $\mathcal{J}$:

- если в сигнатуре был функциональный символ $\mathbf{f}$, удалим его
- добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$
- оценим $\mathbf{f}$ так, чтобы выполнялось: $\bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi\left\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\right\}[\widetilde{d}^n]$,

а значит, $\mathcal{J} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \left(\chi\left\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\right\}\right)$ ▼

Сколемовская стандартная форма

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\ \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ $\mathbf{f}$ <u>не содержится</u> в χ. Тогда

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{выполнима формула}$$
$$\psi : \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \left(\chi\left\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}\left(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\right)\right\}\right)$$

Сколемизация — это устранение кванторов $\exists$ с введением новых символов с целью получить более простую "хорошую" формулу (*здесь — сохраняющую выполнимость и невыполнимость*)

При устранении $\exists$ на место удаляемой переменной подставляются сколемовские термы (*здесь* — $\mathbf{f}\left(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\right)$)

Если слева от $\exists$ нет ни одного $\forall$, то подставляется **сколемовская константа**

Сколемовская стандартная форма

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Как работает алгоритм:

$$\varphi_{pnf} : \forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \exists \mathtt{x}_k \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \ldots \ \chi$$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \ldots \ (\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1})\})$$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \ldots$$
$$(\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1}), \mathtt{x}_m / \mathbf{g}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1}, \mathtt{x}_{k+1}, \ldots, \mathtt{x}_{m-1})\})$$
$$\ldots$$
$$Sk(\varphi_{pnf})$$

Требования к выбору функциональных символов:

формула χ не содержит вхождений символа $\mathbf{f}$

символы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ различны

формула χ не содержит вхождений символа $\mathbf{g}$, ...

Сколемовская стандартная форма

Пример

$$\varphi_{pnf}: \quad \forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$Sk(\varphi_{pnf}): \quad \forall x\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Теорема о сколемизации

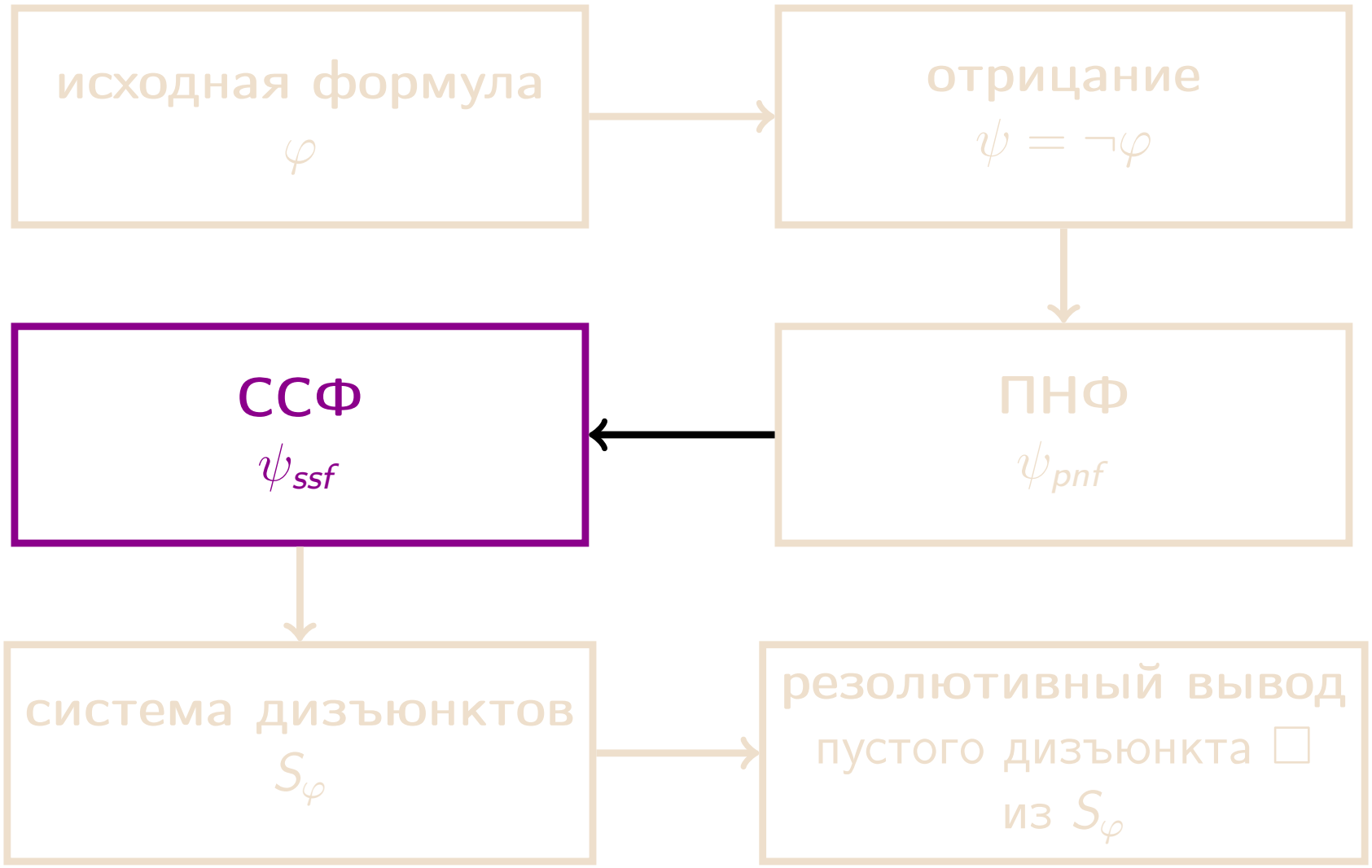
Если φ_{pnf} — ПНФ, то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

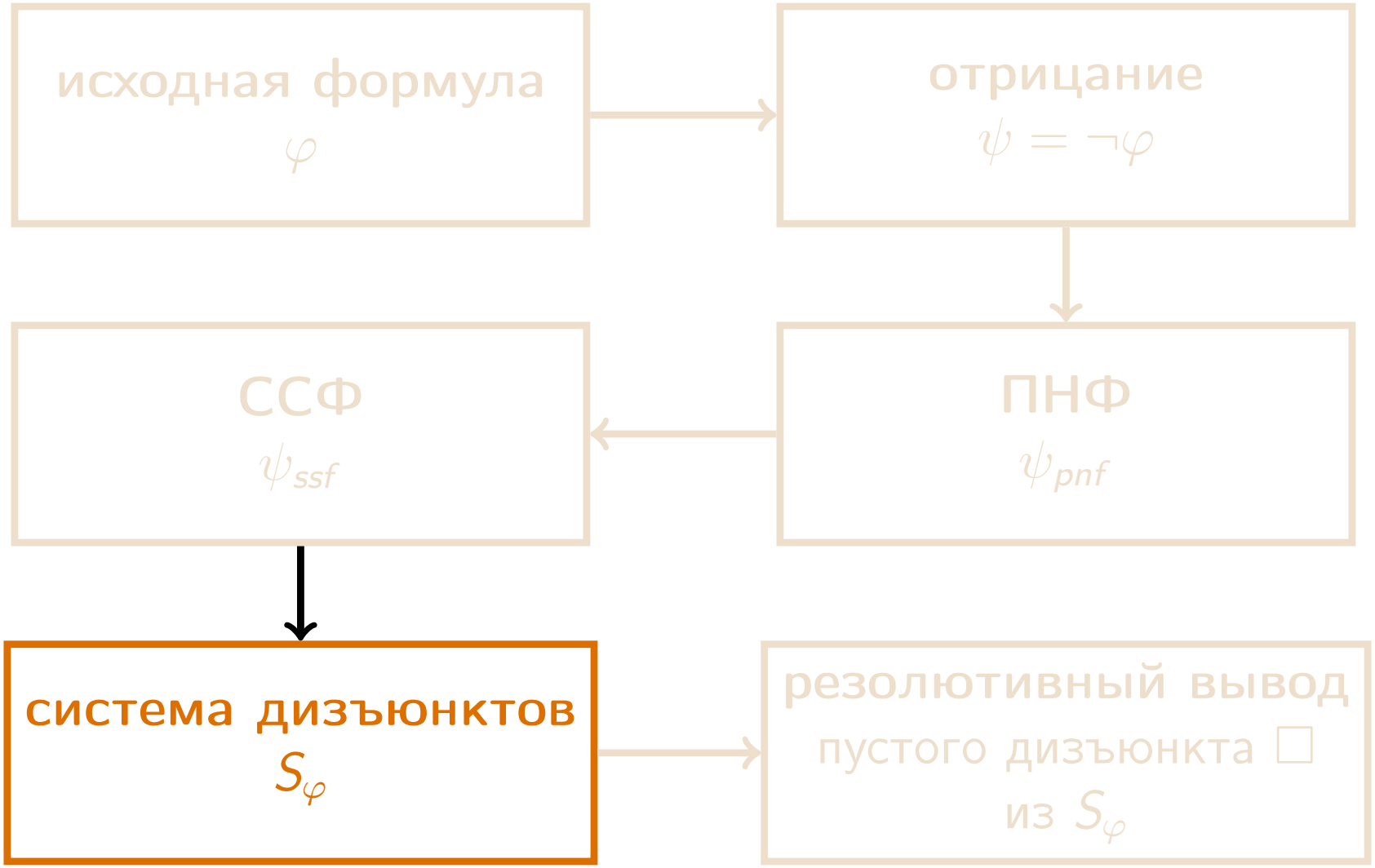
Доказательство. Достаточно **конечное** число раз применить лемму об удалении квантора существования ▼

А если в формулировке теоремы заменить “выполнима” на “общезначима”, останется ли она справедливой?

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Системы дизъюнктов

Дизъюнкт — это ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, (L_1 \vee \cdots \vee L_k)$$

Здесь L_i — это литера: атом или его отрицание

Для краткости кванторную приставку будем опускать

(*вместо дизъюнкта записывать его единственный множитель*)

Пустой дизъюнкт $\square$ — это дизъюнкт, не содержащий ни одной литеры

Пустой дизъюнкт считается **невыполнимым** (почему?)

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \approx L_1 \vee \cdots \vee L_k \vee \mathbf{false}, \text{ а значит, } \square \approx \mathbf{false}$$

Система дизъюнктов невыполнима (противоречива), если она не имеет модели

Системы дизъюнктов

Утверждение

$$\forall \mathtt{x}\,(\varphi \,\&\, \psi) \approx \forall \mathtt{x}\,\varphi \,\&\, \forall \mathtt{x}\,\psi$$

Доказательство. Очевидно

(достаточно применить метод семантических таблиц)

Теорема

ССФ $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\,(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$ **невыполнима**

$$\Leftrightarrow$$

система дизъюнктов $\{D_1, \ldots, D_k\}$ **невыполнима**

Доказательство. По утверждению выше можно равносильно перенести кванторную приставку, продублировав её над каждым множителем матрицы ▼

Системы дизъюнктов

Чего мы достигли?

$$\models \varphi?$$

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ общезначима} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi = \neg\varphi \text{ невыполнима} \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi_{pnf} \text{ невыполнима} \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi_{ssf} = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}} \left(D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k\right) \text{ невыполнима} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{система } S_\varphi = \{D_1, \ldots, D_k\} \text{ невыполнима}
\end{aligned}$$

Итог: проверка общезначимости формул сведена к проверке невыполнимости конечных систем дизъюнктов

Системы дизъюнктов

Пример

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))\ ?$$

Отрицание $\psi = \neg\varphi$*:*

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

Предварённая нормальная форма ψ_{pnf}*:*

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Сколемовская стандартная форма ψ_{ssf}*:*

$$\forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Система дизъюнктов S_φ*:*

$$\left\{\begin{array}{c} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x,u) \end{array}\right\}$$

А как эффективно проверить

невыполнимость системы дизъюнктов?

Конец лекции 6