Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

Блок 6

Причинно-следственный порядок событий

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Напоминание (пример)

Псевдокод узлов:

Узел A:

$\textbf{var}\ m : bool = \mathbb{f};$
$\textbf{do}\ \{$
  1: $m := \neg m;$
  2: $\mathrm{send}(m);$
$\}\ \textbf{until}\ \mathbb{f}$

Узел B:

$\textbf{var}\ m : bool = *;$
$\textbf{do}\ \{$
  1: $\mathrm{receive}(m);$
$\}\ \textbf{until}\ \mathbb{f}$

Множество конфигураций с.п. распределённого алгоритма (A, B):
$(\{\mathbb{t}, \mathbb{f}\} \times \{1, 2\}) \times (\{\mathbb{t}, \mathbb{f}\} \times \{1\}) \times \mathbb{M}(\{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$

Пример вычисления с.п. этого алгоритма с асинхронным обменом сообщениями (последовательности конфигураций, получающихся друг из друга выполнением действий узлами):
$(\langle\mathbb{f}, 1\rangle, \langle\mathbb{f}, 1\rangle, \emptyset) \rightarrow_1 (\langle\mathbb{t}, 2\rangle, \langle\mathbb{f}, 1\rangle, \emptyset) \rightarrow_1 (\langle\mathbb{t}, 1\rangle, \langle\mathbb{f}, 1\rangle, \{\mathbb{t}\}) \rightarrow_2$
$(\langle\mathbb{t}, 1\rangle, \langle\mathbb{t}, 1\rangle, \emptyset) \rightarrow_1 (\langle\mathbb{f}, 2\rangle, \langle\mathbb{t}, 1\rangle, \emptyset) \rightarrow_1 (\langle\mathbb{f}, 1\rangle, \langle\mathbb{t}, 1\rangle, \{\mathbb{f}\}) \rightarrow_2$
$(\langle\mathbb{f}, 1\rangle, \langle\mathbb{f}, 1\rangle, \emptyset) \rightarrow_1 \ldots$

Ограничение пересылки сообщений

Техническое упрощение. Здесь и везде до конца курса будем (для технической простоты) по умолчанию рассматривать только такие распределённые алгоритмы, в которых для каждого сообщения m существует не более одного узла (адресата), в с.п. которого содержится действие приёма m

С технической стороны можно это представить как сообщение узлов по каналам точка-точка или как включение информации об адресате в сообщение

Диаграммы событий

$\mathbb{N}$ — так будем обозначать множество всех натуральных чисел:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Для последовательности $\mathfrak{S}$ записью

- $|\mathfrak{S}|$ обозначим длину последовательности $\mathfrak{S}$ (количество её элементов)
- $\mathfrak{I}_{\mathfrak{S}}$ обозначим множество номеров элементов $\mathfrak{S}$:
  - Если $|\mathfrak{S}| = n < \infty$, то $\mathfrak{I}_{\mathfrak{S}} = \{1, 2, \dots, n\}$
  - Если $\mathfrak{S} = \infty$, то $\mathfrak{I}_{\mathfrak{S}} = \mathbb{N}$

Вычислению $E = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ с.п. распределённого алгоритма $\mathfrak{A} = (p_1, \dots, p_n)$ сопоставим следующую последовательность действий $Act(E, \mathfrak{A}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$:

- Если $|E| < \infty$, то $|Act(E, \mathfrak{A})| = |E| - 1$, иначе $|Act(E, \mathfrak{A})| = \infty$
- $\gamma_{i+1} = \alpha_i(\gamma_i)$ для $i \in \mathfrak{I}_{Act(E, \mathfrak{A})}$

Диаграммы событий

Для иллюстрации конечного частичного вычисления E с.п. алгоритма $\mathfrak{A}$ будем использовать диаграммы событий (или, по-другому, диаграммы действий), устроенные так:

- Каждому узлу отвечает горизонтальная линия, и вычислению в целом — горизонтальная линия под линиями узлов
- На линии вычисления E отмечаются точками слева направо действия $Act(E, \mathfrak{A})$, и действие узла отмечается точкой на линии этого узал на той же вертикали
- Действия отправки и соответствующего приёма сообщения (для первой в вычислении отправки m — первый приём m; для второй отправки — второй приём; и т.д.) объявляются взаимосвязанными в вычислении и соединяются стрелкой от отправки к приёму

Диаграммы событий

Пример

Узел A:

$$\begin{array}{l} \textbf{var}\ m : bool = \mathbb{f};\\ \textbf{do}\ \{\\ \quad 1\!:\ m := \neg m;\\ \quad 2\!:\ \mathrm{send}(m);\\ \}\ \textbf{until}\ \mathbb{f} \end{array}$$

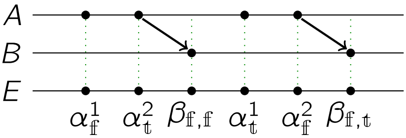
Узел B:

$$\begin{array}{l} \textbf{var}\ m : bool = *;\\ \textbf{do}\ \{\\ \quad 1\!:\ \mathrm{receive}(m);\\ \}\ \textbf{until}\ \mathbb{f} \end{array}$$

Частичному вычислению E

$(\langle \mathbb{f}, 1\rangle, \langle \mathbb{f}, 1\rangle, \emptyset) \to_1 (\langle \mathbb{t}, 2\rangle, \langle \mathbb{f}, 1\rangle, \emptyset) \to_1 (\langle \mathbb{t}, 1\rangle, \langle \mathbb{f}, 1\rangle, \{\mathbb{t}\}) \to_2 (\langle \mathbb{t}, 1\rangle, \langle \mathbb{t}, 1\rangle, \emptyset) \to_1$
$(\langle \mathbb{f}, 2\rangle, \langle \mathbb{t}, 1\rangle, \emptyset) \to_1 (\langle \mathbb{f}, 1\rangle, \langle \mathbb{t}, 1\rangle, \{\mathbb{f}\}) \to_2 (\langle \mathbb{f}, 1\rangle, \langle \mathbb{f}, 1\rangle, \emptyset)$

алгоритма (A, B) отвечает диаграмма событий



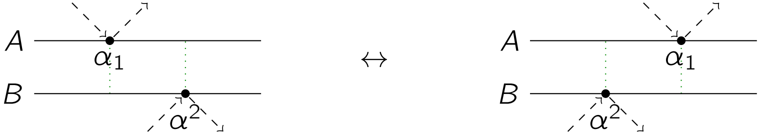
с действиями $\alpha^1_v = (\langle v, 1\rangle \to \langle \neg v, 2\rangle)$, $\alpha^2_v = \langle v, 2\rangle \xrightarrow{v!} \langle v, 1\rangle$,
$\beta_{v,w} = \langle v, 1\rangle \xrightarrow{v?} \langle w, 1\rangle$

Теорема (о перестановке соседних действий). Пусть

- **γ — конфигурация с.п. распределённого алгоритма с асинхронным обменом сообщениями и**
- **α_1 и α_2 — действия различных узлов этого алгоритма, допустимые в γ.**

Тогда действие α_1 допустимо в $\alpha_2(\gamma)$, действие α_2 допустимо в $\alpha_1(\gamma)$, и верно равенство $\alpha_1(\alpha_2(\gamma)) = \alpha_2(\alpha_1(\gamma))$

Иллюстрация:



Доказательство. **Это задача 1** (достаточно перебрать все подходящие пары типов событий и применить подходящие определения)

Причинно-следственный порядок событий

Для последовательности действий $Act(E, \mathfrak{A}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ зададим двуместное отношение $\prec$ причинно-следственного порядка на множестве $\mathfrak{I}_{Act(E,\mathfrak{A})}$ как наименьшее (теоретико-множественно) отношение, удовлетворяющее следующим условиям:

- Если α_i и α_j — действия одного узла, то $i \prec j$
- Если α_i и α_j — взаимосвязанные действия отправки и приёма соответственно, то $i \prec j$
- Отношение $\prec$ транзитивно: если $i \prec j \prec k$, то $i \prec k$

Производное отношение $\preceq$ зададим так: $i \preceq j \Leftrightarrow i \prec j$ и $i \neq j$

Если не выполняется ни одно из соотношений $i \preceq j$ и $j \preceq i$, то будем называть номера i, j несравнимыми ($i \| j$), а также параллельными

Причинно-следственный порядок событий

Задача 2. Доказать, что $\prec$ обязательно является отношением строгого частичного порядка

Задача 3. При каких условиях отношение $\prec$ является отношением линейного (полного) порядка?

Задача 4. Всегда ли (если нет, то в каких случаях) множество номеров событий с отношением $\prec$ является решёткой?

Причинно-следственный порядок событий

Для последовательности $\mathfrak{S} = (x_1, x_2, \dots)$ и биекции $f : \mathfrak{I}_{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{I}_{\mathfrak{S}}$ f-перестановкой последовательности $\mathfrak{S}$ будем называть последовательность $(x_{f(1)}, x_{f(2)}, \dots)$

Перестановкой последовательности $\mathfrak{S}$ будем называть f-перестановку последовательности для любой биекции f

$\mathfrak{S}[i]$ — так будем обозначать элемент x_i последовательности $\mathfrak{S} = (x_1, x_2, \dots)$

Будем говорить, что f-перестановка $\mathcal{A}$ последовательности действий $Act(E, \mathfrak{A})$ сохраняет причинно-следственный порядок, если из неравенства $i \prec j$ следует $f(i) < f(j)$

Причинно-следственный порядок событий

Теорема (о перестановке действий). **Пусть:**

- $Act(E,\mathfrak{A})$ **— последовательность действий, отвечающая вычислению** E **с.п. распределённого алгоритма** $\mathfrak{A}$**, исходящему из конфигурации** γ**;**
- $\mathcal{A}$ **—** f**-перестановка последовательности** $Act(E,\mathfrak{A})$**, сохраняющая причинно-следственный порядок.**

Тогда существует единственное вычисление E' **с.п. алгоритма** $\mathfrak{A}$**, исходящее из** γ **и такое что** $\mathcal{A} = Act(E',\mathfrak{A})$**, и если вычисление** E **конечно, то** E' **оканчивается в той же конфигурации, что и** E

Доказательство (краткий эскиз). *Единственность* E' *очевидна*: вычисление однозначно задаётся последовательностью действий

Существование. Как известно, каждая перестановка последовательности $\mathfrak{S}$ может быть получена из $\mathfrak{S}$ последовательной перестановкой соседних элементов

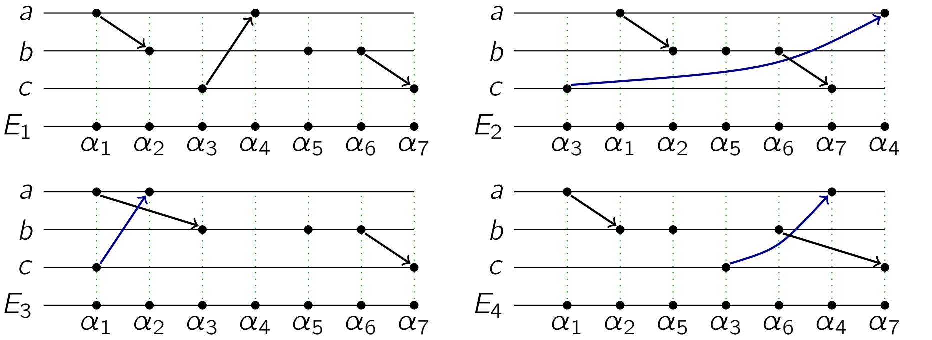
Для перестановки соседних действий при получении $\mathcal{A}$ из $Act(E,\mathfrak{A})$ достаточно применить теорему о перестановке соседних действий ▼

Причинно-следственный порядок событий

Последовательности событий $Act(E', \mathfrak{A})$, $Act(E'', \mathfrak{A})$ вычислений E', E'' с.п. распределённого алгоритма $\mathfrak{A}$ будем считать эквивалентными, если одна из них является перестановкой другой, сохраняющей причинно-следственный порядок

Вычисления E' и E'' с.п. распределённого алгоритма $\mathfrak{A}$ будем считать эквивалентными, если эквивалентны $Act(E', \mathfrak{A})$ и $Act(E'', \mathfrak{A})$

Например, следующие вычисления эквивалентны:



Причинно-следственный порядок событий

При анализе вычислений систем переходов распределённых алгоритмов точный порядок конфигураций в вычислении не всегда существенен: одно и то же выполнение системы в зависимости от точного времени выполнения действий в узлах может отвечать разным последовательностям конфигураций с одним и тем же результатом

Такие формально разные, но фактических одинаковые вычисления имет один причинно-следственный порядок выполнения действий и отличаются только порядком выполнения параллельных действий

Вычислением распределённого алгоритма, учитывающим всевозможные порядки выполнения параллельных действий, будем называть класс эквивалентности вычислений с.п. этого алгоритма

Задача 5 (трудная). Сформулируйте и докажите аналоги теорем о перестановке соседних действий и о перестановке действий для алгоритмов с синхронным обменом сообщениями, предложив соответствующее отношение $\prec$