Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики»

1. Общая информация

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений».

Курс читается в 7 семестре в объёме 3 часов лекций и 1 часа семинарских занятий в неделю. Курс завершается экзаменом, на который выносятся теоретические вопросы, изложенные на лекциях, и задачи, рассмотренные на семинарах. В течение семестра могут проводиться проверочные работы, оценки за которые влияют на оценку на экзамене.

Курс читают сотрудники кафедры математической кибернетики; лекторы 2023-2024 учебного года — м.н.с. Савицкий Игорь Владимирович (savvvig@gmail.com), проф. Ложкин Сергей Андреевич (lozhkin@cs.msu.ru).

2. Аннотация

Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» продолжает курсы «Дискретная математика» и «Основы кибернетики» и посвящён рассмотрению классических вычислительных моделей в теории алгоритмов, связанных с распознаванием множеств и вычислением функций, элементам теории сложности алгоритмов и теории дискретных управляющих систем.

В курсе изучаются модели конечных автоматов (распознавателей и преобразователей) и машин Тьюринга, рассматривается техника преобразований этих устройств и вычислений на этих устройствах. Для каждого из устройств приводится эквивалентный алгебраический формализм: правоинвариантные отношения эквивалентности, регулярные выражения, функциональная система с операциями суперпозиции и введения обратной связи над автоматными функциями, формализм Клини для класса частично-рекурсивных функций. Для каждого из случаев доказывается эквивалентность алгебраического и автоматного (машинного) подходов к определению класса множеств или функций. Рассматриваются классы сложности P и NP, доказывается полиномиальная разрешимость и устанавливается NP-полнота ряда задач.

Излагаются методы синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов и для не всюду определённых ФАЛ, устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этих классов. Изучается сложность некоторых «индивидуальных» ФАЛ. Исследуется связь между схемной и алгоритмической сложностью ФАЛ.

3. Программа

I. Конечные автоматы

Конечные автоматы-распознаватели и конечно-автоматные множества слов, задание автоматов диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Правоинвариантное отношение эквивалентности, его связь с конечно-автоматными множествами. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. Операции произведения и итерации, замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. Регулярные выражения и регулярные множества, совпадение классов регулярных и конечно-автоматных множества.

Детерминированные функции, их определение с помощью бесконечных деревьев, вес дерева. Конечные автоматы-преобразователи, их задание диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. Зависимость с запаздыванием, операция введения обратной связи, замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции введения обратной связи. Схемы из автоматных элементов, реализация конечно-автоматных функций схемами из автоматных элементов. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций.

II. Машины Тьюринга, рекурсивные функции и классы сложности

Машины Тьюринга, функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. Моделирование машин Тьюринга. Существование универсальной машины Тьюринга, неразрешимость проблемы остановки.

Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации над частичными функциями. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно-рекурсивные функции, примитивная рекурсивность простейших арифметических функций. Частично-рекурсивные функции, примеры не всюду определенных частично-рекурсивных функций. Совпадение класса частично-рекурсивных функций с классом функций, вычислимых на машинах Тьюринга, теорема Клини.

Классы сложности P и NP. Полиномиальная сводимость, NP-полнота. NP-полнота задачи о выполнимости КНФ и задачи о выполнимости 3-КНФ. Полиномиальная разрешимость задачи о выполнимости 2-КНФ.

III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

Задача синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов. Мощностная классификация специальных классов ФАЛ и нижние мощностные оценки связанных с ними функций Шеннона. Квазиинвариантные классы ФАЛ.

Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для (ненулевых) квазиинвариантных классов. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов на основе их «погружения» в квазиинвариантные классы и на основе принципа локального кодирования О. Б. Лупанова.

Задача синтеза схем для неоднозначно заданных ФАЛ и, в частности, для не всюду определённых ФАЛ. Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для не всюду определённых ФАЛ.

Задача синтеза схем для «индивидуальных» ФАЛ и проблема получения нижних оценок их сложности. Теорема Храпченко о сложности реализации ФАЛ в классе π-схем. Схемная и алгоритмическая сложность функций, гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа.

4. Предварительный список вопросов к экзамену по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (осенний семестр 2022-2023 уч. года; 411–419 группы)

I. Конечные автоматы

1. Конечный автомат-распознаватель, конечно-автоматное множество. [1, с. 27-28]
2. Правоинвариантные отношения эквивалентности, связь с конечно-автоматными множествами. [1, с. 29–31]
3. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. [1, с. 32–33]
4. Недетерминированные конечные автоматы, процедура детерминизации. [1, с. 34–36]
5. Операции произведение и итерации. Замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. [1, с. 37–39]
6. Регулярные выражения и регулярные множества. [1, с. 40]
7. Теорема Клини. [1, с. 40–42]
8. Детерминированные функции. Число детерминированных функций. Задание детерминированных функций деревьями. Вес дерева. [2, с. 74–85]
9. Конечный автомат-преобразователь. Канонические уравнения, векторная и скалярная формы канонических уравнений. [1, с. 44-45], [2, с. 86–87, 88–91]
10. Замкнутость классов детерминированных и конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. [2, с. 91–94], [1, с. 57–59]
11. Зависимость с запаздыванием. Операция введения обратной связи. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно введения обратной связи. [2, с. 94–96, 98–102]
12. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций. Полная система из одной функции. [2, с. 105–108], [1, с. 60-61]

II. Машины Тьюринга, рекурсивные функции и классы сложности

13. Частичные функции. Машины Тьюринга. Основной код. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. [1, с. 65–68]
14. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. Вычислимость селекторных функций и функций 0, $x+1$. [1, с. 70–72]
15. Моделирование машин Тьюринга. Механизм дорожек. [1, с. 74–77]
16. Универсальные функции, универсальная машина Тьюринга. Неразрешимость проблемы остановки. [1, с. 84–86]
17. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации над частичными функциями. Класс частично рекурсивных функций. [1, с. 77–79]
18. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Включение класса частично рекурсивных функций в класс вычислимых функций. [1, с. 80–83]

19. Класс примитивно рекурсивных функций. Основные примитивно рекурсивные функции. [1, с. 102–106]

20. Класс частично рекурсивных функций. Примеры частично рекурсивных функций. Нумерационные функции. [1, с. 79, 108-109, 112-113]

21. Частичная рекурсивность вычислимых функций. Формула Клини. [1, с. 114–117]

22. Классы P и NP. Примеры задач из класса NP. [1, с. 89–93], [3, с. 46–49]

23. NP-полнота. Теорема Кука. [1, с. 95–99], [3, с. 49–54]

24. NP-полнота задачи 3-ВЫП. [1, с. 99-100], [3, с. 54–56]

25. Полиномиальная разрешимость задачи 2-ВЫП. [1, с. 101-102], [4, с. 16–17]

III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

26. Задача синтеза схем для функций (операторов) из специального класса, мощностные нижние оценки функции Шеннона для их сложности в случае невырожденного (ненулевого, квазиинвариантного) класса. [8, §1], [9]

27. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для ненулевых квазиинвариантных классов, их стандартность. Общее описание принципа локального кодирования, его применение для доказательства стандартности класса самодвойственных функций. [8, §§3-4], [9]

28. Задача синтеза схем для не всюду определённых функций. Особенности получения нижней мощностной оценки соответствующей функции Шеннона, формулировка теоремы о её асимптотическом поведении. [8, §6], [9]

29. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «сильной» определённости. [8, §7], [9]

30. Теорема Храпченко, нижние оценки сложности линейной функции в классе π-схем. [8, §§9-10], [9]

31. Метод забивающих констант и примеры его применения для получения нижних оценок сложности некоторых функций. Сложность линейной функции в классе схем из функциональных элементов. [8, §10], [10, часть II, §§2-3]

32. Схемная и алгоритмическая сложность функций, построение сложно реализуемых функций. Гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа. [4, с. 42–45], [9]

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи по конечным автоматам

1. Построить диаграмму Мура конечного автомата, распознающего заданное множество.
2. Используя правоинвариантное отношения эквивалентности, доказать, что заданное множество не является конечно-автоматным.
3. Построить регулярное выражение, определяющее заданное множество.
4. Построить диаграмму Мура конечного автомата, реализующего заданную функцию.
5. По диаграмме Мура построить канонические уравнения и схему в стандартном автоматном базисе.
6. По схеме в стандартном автоматном базисе построить канонические уравнения и диаграмму Мура.
7. Доказать полноту (относительно операций суперпозиции и обратной связи) заданного множества автоматных функций.

II. Задачи по машинам Тьюринга, рекурсивным функциям и классам сложности

8. Построить машину Тьюринга, вычисляющую заданную функцию или выполняющую заданное преобразование.
9. Доказать примитивную рекурсивность заданной функции.
10. Применить операцию минимизации к заданной (частичной) функции.
11. Доказать частичную рекурсивность заданной функции.
12. Доказать принадлежность к классу P заданного множества или задачи.
13. Доказать принадлежность к классу NP заданного множества или задачи.
14. Провести полиномиальное сведение заданной КНФ к 3-КНФ, сохраняющее выполнимость.
15. Применить полиномиальный алгоритм проверки выполнимости к заданной 2-КНФ.

III. Задачи на сложность реализации функций алгебры логики (ФАЛ)

16. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ квази-инвариантным классом, и, в случае квази-инвариантности этого класса, найти его мощностные последовательности, а затем асимптотику связанной с ним функции Шеннона.
17. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ (операторов) вырожденным, и, в случае его невырожденности, получить нижнюю мощностную оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этого класса схемами из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе.
18. Получить верхнюю (асимптотически точную) оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из заданного специального класса при их реализации СФЭ в стандартном базисе с использованием идей локального кодирования или не всюду определённых ФАЛ.
19. Получить требуемую нижнюю оценку сложности реализации заданной ФАЛ в классе π-схем или классе СФЭ.

Литература

1. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 133 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/2/25/ИзбрГлавыДискрМатем_2015.pdf

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.

3. Алексеев В. Б. Введение в теорию сложности алгоритмов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2002. — 82 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/c/c4/KNIGA1.pdf

4. Сапоженко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 46 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko_alg.pdf (номера страниц не соответствуют печатному изданию)

5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.

6. Ложкин С. А. Видеозаписи лекций ДГДМиК 2020 года и презентация к ним.
   https://m.cs.msu.ru/s/SzdHtfy8q67277g

7. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. — 256 с.

8. Ложкин С. А. Дополнительные главы кибернетики. — МГУ, 2019.
   https://mk.cs.msu.ru/images/0/0b/Dgcyb-lect-190113.pdf

9. Ложкин С. А. Слайды лекций 2020–2021 уч. года.
   https://m.cs.msu.ru/s/wAGyHgPabQgZkTJ

10. Ложкин С. А. Дополнительные главы кибернетики и теории управляющих систем. МГУ, 2008.
    https://mk.cs.msu.ru/images/8/8f/Лекции_ДГКТУС_2008.pdf

11. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007. — 188 с.

12. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики»: 2-е изд. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2011. — 71 с.
    https://mk.cs.msu.ru/images/a/ab/Задачи_по_курсу_Основы_кибернетики_2011.pdf

6. О контроле аудиторной и самостоятельной работы студентов

Курс предполагает самостоятельную работу студентов, в частности, выполнение домашних заданий и проработку материала, пройденного лекциях и семинарах.

В течение семестра планируется проведение трёх проверочных работ по курсу. Эти работы призваны проверить умение решать задачи и понимание определений и утверждений курса. Проверочные работы проводятся в рамках лекционных занятий.

7. О проведении экзамена

Экзамен проводится устно. Студент получает билет с двумя теоретическими вопросами и темой задачи из трёх различных разделов курса. На подготовку ответа на теоретические вопросы (определения, формулировки, доказательства) отводится не более 30 минут. В случае успешного ответа на теоретические вопросы студенту выдаётся задача по указанной в билете теме. На решение задачи отводится не более 15 минут. После решения задачи проводится опрос по курсу на усмотрение экзаменатора (определения, формулировки, простые задачи).

Использование конспектов и других материалов во время экзамена не допускается. По результатам проверочных работ, проведённых в течение курса, может быть выставлена предварительная оценка. При её наличии возможно проведение экзамена в упрощённой форме.

8. Планы семинарских занятий на осенний семестр 2022–2023 уч. года

Семинар 1.

Множества, допускаемые конечными автоматами. Правоинвариантная эквивалентность. Теоретический материал [1, с. 27–31].

В классе.

Задачи из приложения 1: 1 (1, 2, 4, 6, 9), 2 (1, 3, 4), 3 (1, 3, 5), 4, 5 (1, 3).

На дом.

Задачи из приложения 1: 1 (3, 5, 7, 10), 2 (2, 5), 3 (4, 6), 5 (2, 4).

Семинар 2.

Теоретико-множественные операции над конечно-автоматными множествами. Недетерминированные автоматы. Операции произведения и итерации. Регулярные выражения и регулярные множества. Теоретический материал [1, с. 32–42].

В классе.

Задачи из приложения 1: 8, 11 (1), 12 (1, 3), 23 (1), 24 (1), 16 (1, 3, 5).

На дом.

Задачи из приложения 1: 9, 11 (2), 12 (2), 23 (2), 24 (2), 16 (2, 4, 6).

Семинар 3.

Детерминированные функции. Построение диаграмм Мура и канонических уравнений. Операции суперпозиции и обратной связи. Построение схем из автоматных элементов. Полнота систем ограниченно-детерминированных функций. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе.

Из [5, глава IV]: 1.1 (1, 8), 1.2 (1), 2.1 (1, 16), 2.8 (6; не строить диаграмму Мура), 2.9 (4; не строить диаграмму Мура), 2.13 (4), 2.14 (1), 2.17 (1, 4).

В условии 2.17 (4) ошибка. Правильный вид функций:

$f_1\colon y(t) = \overline{x}(t),\ t \geqslant 1$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \vee x_3(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x_2(t) \cdot x_3(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Задачи 2.1, 2.13 и 2.14 повторяют задачи, которые решались на семинарах в курсе «Дискретная математика» на первом курсе.

На дом.

Из [5, глава IV]: 1.1 (4, 6), 1.2 (2), 2.1 (3, 7), 2.8 (5; не строить диаграмму Мура), 2.9 (5; не строить диаграмму Мура), 2.13 (6), 2.14 (2), 2.17 (2, 5).

В условии 2.17 (5) ошибка. Правильный вид функций:

$f_1\colon y(t) = \overline{x}_1(t) \cdot \overline{x}_2(t) \vee \overline{x}_1(t) \cdot \overline{x}_3(t) \vee \overline{x}_2(t) \cdot \overline{x}_3(t),\ t \geqslant 1,$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \oplus x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Семинар 4.

Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе.

Из [5, глава V]: 1.8 (1, 3), 1.4 (2); 1.14 (1, 2, 3, 4, 9, 10), 1.15 (2, 7).

На дом.

Из [5, глава V]: 1.8 (2, 6), 1.4 (4), 1.14 (5, 6, 7, 12), 1.15 (4, 6).

Семинар 5.

Примитивно-рекурсивные функции. Операция минимизации. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 78, 102–107].

В классе.

Из [5, глава V]: 2.1 (9, 10, 12); применить операцию примитивной рекурсии к частичным функциям $g(x) = 2x$ и $h(x, y, z) = z - 2$; 2.3 (9), 2.4 (1, 5).

Используя операции $\prod_{i \leqslant x}$ и $\sum_{i \leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\lfloor \log_a x \rfloor$.

Из [5, глава V]: 2.5 (1, 2, 7, 11), 2.7 (2).

На дом.

Из [5, глава V]: 2.1 (2, 4), 2.4 (3, 7a), 2.3 (7, 8, 9).

Используя операции $\prod_{i \leqslant x}$ и $\sum_{i \leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $p(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — простое число.} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$f_1(x)$ — количество чисел вида y^y на отрезке $[0, x]$. $f_2(x)$ — количество чисел вида $2^y \cdot 3^z$ на отрезке $[0, x]$.

Из [5, глава V]: 2.5 (4, 10, 13), 2.7 (3, 5).

Семинар 6.

Частично-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 108–113].

В классе.

Из [5, глава V]: 2.8 (1, 2, 5).

Задачи из приложения 2: 2, 3, 5, 7, 8, 10.

На дом.

Из [5, глава V]: 2.8 (3).

Задачи из приложения 2: 1, 4, 6, 9, 11.

Семинар 7.

Классы сложности. Теоретический материал [1, с. 89–102], [3, с. 46–56], [4, с. 16–17].

В классе.

Задачи из приложения 3: 1 (1, 3, 5, 7), 2 (1, 3), 3 (2, 3), 4 (1, 3), 5 (1, 3), 6 (2, 4).

На дом.

Задачи из приложения 3: 1 (2, 4, 6, 8), 2 (2, 4), 3 (1, 4), 4 (2, 4), 5 (2, 4), 6 (1, 3).

Семинар 8.

Постановка задачи синтеза схем для ФАЛ (операторов) из специальных классов, мощностные характеристики этих классов и соответствующие нижние оценки функций Шеннона для их сложности. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, особенности поведения их мощностных последовательностей. Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для невырожденных квазиинвариантных классов. Теоретический материал [8, §§1–3, 11], [6, слайды лекций к вопросам 25–26].

В классе.

1. Выяснить, какие из следующих классов ФАЛ (операторов) являются невырожденными, и получить нижние мощностные оценки (НМО) функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из данных классов СФЭ в стандартном базисе:

   1) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = 0$;
   2) Q — класс ФАЛ, симметричных по БП x_1, x_2, x_3;
   3) Q — класс ФАЛ, монотонных по БП x_1, x_2;
   4) Q — класс ФАЛ, равных 0 на наборах с чётным числом 1;
   5) Q — класс линейных[1] ФАЛ;
   6) Q — класс самодвойственных[1] ФАЛ;
   7) Q — класс симметрических[1] ФАЛ;
   8) Q — класс операторов вида $F = (f_1, f_2, f_3)$ таких, что $f_i \cdot f_j \equiv 0$ при $i \neq j$ и $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \equiv \equiv 1$.

2. Выделить среди классов ФАЛ из задачи 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти асимптотическое поведение функции Шеннона для классов из пунктов 1–4, 8 задачи 2.

На дом.

1. Исследовать на невырожденность и, в случае невырожденности, установить асимптотику НМО функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где:

   1) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = x_2 = 1$;
   2) Q — класс ФАЛ, монотонных по x_1 и антимонотонных по x_2;
   3) Q — класс ФАЛ, у которых любая подфункция от БП x_1, x_2 принадлежит множеству $\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ x_1,\ x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \sim x_2\}$;
   4) Q — класс ФАЛ, симметричных по своим $n, n = 1, 2, \ldots$ существенным БП с рабочими числами вида $a, a+4, a+8, \ldots, a+4k$, где $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $k = \lfloor (n-a)/4 \rfloor$;

2. Выделить среди классов ФАЛ из задачи 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти асимптотическое поведение функций Шеннона из пунктов 1–4 задачи 2.

[1] Класс рассматривался на лекциях.

Методические указания.

Задача 1 решается на основе подсчета мощности множества $Q(n), n = 1, 2, \ldots,$ для рассматриваемого класса Q, а также определения невырожденного класса. Класс ФАЛ (операторов), то есть последовательность $Q(1), Q(2), \ldots, Q(n), \ldots$, где $Q(n)$ — некоторое множество систем из $m = m(n)$ ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, считается невырожденным, если $n + m(n) = o(\log|Q(n)|/\log\log|Q(n)|)$.

Задача 2 решается на основе понятий квазиинвариантного и инвариантного классов. Класс ФАЛ $Q = Q(1) \cup Q(2) \cup \ldots \cup Q(n) \cup \ldots$, называется *квазиинвариантным*, если для некоторого n_0 и любого n, $n \geq n_0$, множество ФАЛ, получающихся из ФАЛ множества $Q(n)$ подстановкой констант 0 и 1 вместо БП x_n, содержится в $Q(n-1)$. При этом его мощностная последовательность $\sigma_Q(n) = \log|Q(n)|/2^n$ монотонно не возрастает, если $n \geq n_0$, и стремится к пределу $\sigma_Q = \lim_{n\to\infty} \sigma_Q(n)$, $0 \leq \sigma_Q \leq 1$.

Аналогично определяется квазиинвариантный класс операторов $Q = Q(0) \cup \ldots \cup Q(n) \cup \ldots$, где $Q(n) \subseteq P_2^{m(n)}(n)$, причём $m(n) = m = \mathrm{const}$, для которого соответствующая последовательность $\sigma_Q(n)$ монотонно не возрастая стремится к пределу σ_Q, где $0 \leq \sigma_Q \leq m$.

Класс ФАЛ Q называется *инвариантным*, если он замкнут относительно операций: 1) добавление и изъятие фиктивных БП ФАЛ; 2) переименование БП без отождествления; 3) подстановка констант вместо БП.

Задача 3 из списка как классных, так и домашних задач решается с помощью утверждения 26.1 про квазиинвариантные классы. При этом для решения классной задачи №4 достаточно «погрузить» класс $Q(n)$ в инвариантный класс $\hat{Q}(n)$, состоящий из ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n) \in \hat{Q}(n)$ вида $f = g(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma)$, где $g \in P_2(n)$, $\sigma \in B$.

Для решения классной задачи №8 достаточно «распространить» утверждение 26.1 на квазиинвариантные классы операторов, состоящие из наборов ФАЛ фиксированной длины $m = m(n) = 3$.

Семинар 9.1

Синтез СФЭ для ФАЛ из специальных классов на основе идей принципа локального кодирования, установление асимптотики соответствующих функций Шеннона. Сложность не всюду определённых функций, их использование при синтезе схем для ФАЛ из специальных классов. Теоретический материал [8, §§4–8], [6, слайды лекций к вопросам 27–28].

В классе.

1. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где $Q(n)$ — класс тех ФАЛ из $P_2(n)$, которые на любой паре противоположных наборов, за исключением, возможно, одной такой пары, принимают одинаковые значения.

2. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1222)$.

3. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не меньше $n/2$ единиц.

На дом.

1. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — класс операторов $F = (f_1, f_2)$ таких, что $f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bar{f}_1(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где набор $\tilde{\beta}$ имеет номер на единицу больше, чем набор $\tilde{\alpha}$, если $\tilde{\alpha} \neq (1, \ldots, 1)$, и $F(\tilde{\alpha}) = (0, 0)$ в противном случае.

2. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0111\,2221)$.

3. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не равное i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$ число единиц.

Методические указания.

Для решения классной (домашней) задачи №1 достаточно воспользоваться принципом локального кодирования аналогично тому, как это делалость в утверждениях вопроса 26, связанных с кодированием для оператора $F \in Q(n)$ всех его «остаточных» операторов вида $F_{\sigma'}(x'') = F(\sigma', x'')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ и $\sigma' \in B^q$, двоичными наборами подходящей длины. При этом основную по сложности часть искомой схемы будет составлять схема, реализующая оператор, который по набору σ' БП x' выдаёт код (в домашней задаче №4 в этом коде должен быть учтён один «дополнительный» разряд столбца значений ФАЛ f_1, позволяющий перейти к «следующему» набору значений БП x'') соответствующего остаточного оператора $F_{\sigma'}(x'')$. Вспомогательный оператор декодирования, который по набору σ'' значений БП x'' и коду оператора $F_{\sigma'}(x'')$ вычисляет $F(\sigma', \sigma'')$, при подходящем выборе параметров будет иметь существенно меньшую сложность.

При решении классной (домашней) задачи №2 необходимо сначала убедиться в том, что любое доопределение g ФАЛ f существенно зависит от k, где $k = 3$ (соответственно $k = 2$) БП, т. е. $L^{\mathrm{C}}(g) \geq k - 1$. После этого достаточно взять в качестве доопределения g ФАЛ f из классной (домашней) задачи ФАЛ, столбец значения которой имеет вид $(0001\,1111)$ (соответственно $(0111\,0111)$) и реализовать её формулой $x_1 \vee x_2 x_3$ (соответственно $x_1 \vee x_3$) сложности k.

В классной (домашней) задаче №3 нижние мощностные асимптотические оценки вида $2^{n-1}/n$ (соответственно $c_n^i / \log c_n^i$) функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(Q(n))$ устанавливаются с помощью утверждения 25.1. Для получения соответствующих верхних оценок произвольная ФАЛ g, $g \in Q(n)$, представляется в виде $g = f \cdot h$, где $f \in \hat{P}_2(n)$ с областью определения A, $A \subseteq B^n$, которая состоит из «нижней» половины слоёв куба в случае классной задачи и i-го слоя куба в случае домашней задачи, а h — характеристическая ФАЛ множества A. После этого ФАЛ f реализуется как не всюду определённая ФАЛ по утверждению[1] 27.2, а ФАЛ h — как симметрическая ФАЛ, имеющая линейную сложность.

Семинар 9.2

Теорема Храпченко и её применение для получения нижних оценок сложности ФАЛ в классе π-схем. Теоретический материал [8, §§9–10], [6, слайды лекций к вопросам 29–30].

Метод забивающих констант и примеры его применения для получения нижних оценок сложности ФАЛ в классе СФЭ. Теоретический материал [10, часть II, §§2–3]

В классе.

1. Доказать, что $12 \leqslant L^{\pi}(s_4^2) \leqslant 16$, где s_n^I — симметрическая ФАЛ от n БП, «рабочие» числа которой составляют множество I, $I \subseteq [0, n]$.

2. Доказать, что $L^{\pi}((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/2$.

3. Найти сложность $L^{\mathrm{C}}(g)$, где $g(x_1, \ldots, x_7) = (\overline{x}_1 x_2 \vee x_1(x_3 \vee x_4)) \wedge (x_5 \vee x_6 \vee x_7)$.

4. Доказать, что $L^{\mathrm{C}}(\mu_n(x_1, \ldots, x_n; y'_0, \ldots, y'_{2^n-1}) \vee \mu_n(x_1, \ldots, x_n; y''_0, \ldots, y''_{2^n-1})) \sim 3 \cdot 2^n$.

На дом.

1. Доказать, что $63 \leqslant L^{\pi}(s_8^{\{2,4,6\}}) \leqslant 80$.

[1] В этом утверждении $\hat{P}_2(n, t)$ — множество всех не всюду определённых ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, имеющих область определённости из t наборов куба B^n.

2. Доказать, что $L^{\pi}((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_s)(x_{s+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/3$, где $1 \leqslant k < s < n$.
3. Найти сложность $L^{\mathrm{C}}(g)$, где $g(x_1, \ldots, x_6) = (x_1 \vee x_2 x_3) \oplus (x_4 x_5 x_6)$.
4. Доказать, что $L^{\mathrm{C}}(\mu_n(x'_1, \ldots, x'_n; y'_0, \ldots, y'_{2^n-1}) \vee \mu_n(x''_1, \ldots, x''_n; y''_0, \ldots, y''_{2^n-1})) \sim 4 \cdot 2^n$.

Методические указания.

Как классная, так и домашняя задачи 1, 2 решаются с помощью теоремы Храпченко (утверждение 29.1) при подходящем подборе множеств $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$, который максимизирует оценку сложности. Так, в классной задаче №1 $\mathcal{N}' = B_2^4$ и $\mathcal{N}'' = B_1^4 \cup B_3^4$, в классной задаче №2 — $\mathcal{N}' = N_f$, а $\mathcal{N}''$ состоит из всех соседних с $\mathcal{N}'$ наборов и т. п.

Требуемые верхние оценки получаются прямым построением искомых π-схем или соответствующих им формул с поднятыми отрицаниями:

$$s_4^2 = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus x_4) \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4,$$
$$s_8^{\{2,4,6\}} = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_8) s_8^{\{0,8\}}(x_1, \ldots, x_8).$$

Как классная, так и домашняя задачи 3, 4 решаются с помощью метода забивающих констант с использованием известных оценок сложности линейных ФАЛ.

Приложение 1: задачи к семинарам по автоматам-распознавателями

1. Построить диаграмму Мура для автомата в алфавите $\{1, 0\}$, который допускает следующее множество:
   1) (a) Множество $\{0, 1, \Lambda\}$; (b) Множество $\{0, 1\}^* \setminus \{0, 1, \Lambda\}$;
   2) Все слова, которые начинаются словом 01;
   3) Все слова, которые оканчиваются словом 101;
   4) Все слова длины 3 и слово 0;
   5) Все слова длины 3, кроме слова 110;
   6) Все слова, которые содержат слово 001;
   7) Все слова, которые составлены из «блоков» 011 и 101;
   8) Все слова, имеющие нечётную длину, и слово 11;
   9) Все слова, которые имеют вхождения хотя бы одного из слов 000 и 111;
   10) Все слова, у которых за каждым символом 1 следуют как минимум два символа 0.
2. Доказать конечную автоматность следующих множеств:
   1) Любое конечное множество X в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и множество $A^* \setminus X$;
   2) Множество всех слов вида a_i^n $(1 \leqslant i \leqslant m,\ n = 1, 2, \ldots)$ в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$;
   3) Множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые имеют чётную длину, начинаются символом 0 и оканчиваются символом 1;
   4) Множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат неперекрывающиеся вхождения слов 001 и 011;
   5) Множества вида $0^{n_1} 1 0^{n_2} 1 \ldots 1 0^{n_k}$, где $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$
   (a) При каждом фиксированном k; (b) При произвольном k.
   6) Множества слов вида $(10^{m_1}1)^{n_1} 0 (10^{m_2}1)^{n_2} 0 \ldots (10^{m_k}1)^{n_k}$,
   где $m_1, \ldots, m_k \geqslant 2$, $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$ и число k фиксировано.

3. Определить на множестве $\{0,1\}^*$ правоинвариантное отношение эквивалентности конечного индекса, для которого следующие множества будут представимы в виде объединения некоторого числа классов эквивалентности:

   1) $\{\Lambda\}$;
   2) $\{0\}$;
   3) $\{\Lambda, 0, 1\}$;
   4) Множество всех слов вида 0^{3n}, где $n \geqslant 1$;
   5) Множество всех слов вида $0^n 1$, где $n \geqslant 0$;
   6) Множество всех слов чётной длины (включая пустое слово) вместе со словами 1 и 111.

4. Для любого $n \geqslant 2$ определить на множестве $\{0,1\}^*$ правоинвариантное отношение эквивалентности индекса n.

5. Пользуясь правоинвариантным отношением эквивалентности доказать, что следующие множества не являются конечно-автоматными:

   1) $\{0^n 1^{2n} \colon n = 1, 2, \ldots\}$;
   2) $\{0^n 1 0^n \colon n = 1, 2, \ldots\}$;
   3) Множество всех симметричных слов в алфавите $\{0,1\}$;
   4) $\{0^{n^2} \colon n = 1, 2, \ldots\}$;
   5) $\{0^n 1^n 0^n \colon n = 1, 2, \ldots\}$.

6. Существует ли бесконечное конечно-автоматное множество X такое, что множество $\{\bar{a}\bar{a} \colon \bar{a} \in X\}$ конечно-автоматно?

7. (*) По аналогии с правоинвариантным отношением эквивалентности определим на множестве A^* левоинвариантное отношение эквивалентности: если $\bar{a} \sim \bar{b}$ и $\bar{c}$ — произвольное слово из A^*, то $\bar{c}\bar{a} \sim \bar{c}\bar{b}$.

   Будет ли для левоинвариантного отношения эквивалентности справедлив аналог теоремы (из лекций) о представлении произвольного конечно-автоматного множества в виде объединения некоторого количества классов левоинвариантного отношения эквивалентности конечного индекса?

8. Ввести операцию прямого произведения автоматов. С использованием этой операции доказать замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения.

9. Выяснить, сохраняют ли операции $\cup$, $\cap$, $\cdot$, $*$ класс всех множеств, которые не являются конечно-автоматными?

10. Какие множества допускают следующие недетерминированные автоматы (предварительно построить для них диаграммы Мура):

    1)

$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_2) = \{q_3\}, \quad f(1, q_2) = \{q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_2, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}
$$

2)

$$\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1\},\\
&f(0, q_2) = \{q_2\}, \qquad\;\; f(1, q_2) = \{q_2, q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_1, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}$$

11. Для заданных недетерминированных автоматов методом детерминизации построить эквивалентный детерминированный автомат. Можно давать любые автоматы, в том числе, автоматы из задачи 10:

1)

$$\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_2) = \{q_3\}, \quad f(1, q_2) = \{q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_2, q_3\},\\
&F = \{q_3\};
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1\},\\
&f(0, q_2) = \{q_2\}, \qquad\;\; f(1, q_2) = \{q_2, q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_1, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}$$

12. Пусть $\mathcal{A}_i = \{A, Q, f, q_1, F_i\}, i = 1, 2, 3$ (недетерминированные автоматы). Верно ли, что
    1) При $F_2 = Q \setminus F_1$ выполнено $D(\mathcal{A}_2) = A^* \setminus D(\mathcal{A}_1)$;
    2) При $F_3 = F_1 \cup F_2$ выполнено $D(\mathcal{A}_3) = D(\mathcal{A}_1) \cup D(\mathcal{A}_2)$;
    3) При $F_3 = F_1 \cap F_2$ выполнено $D(\mathcal{A}_3) = D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$.

13. Отправляясь от множеств $\{0\}$ и $\{1\}$, построить с помощью операций объединения, произведения и итерации множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат подслово 0001.

14. Пусть $\bar{a}$ — слово в алфавите $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Сколько раз нужно применить операцию итерации, чтобы получить множество $A^* \setminus \{\bar{a}\}$ из множеств $\{a_1\}, \dots, \{a_m\}$ с помощью операций объединения, произведения и итерации?

15. Пусть множество X состоит из n слов. Может ли множество $X \cdot X$ содержать больше n^2 слов? Меньше n^2 слов? В точности n^2 слов?

16. Доказать регулярность следующих множеств слов в алфавите $\{0, 1\}$:
    1) Любое конечное множество слов и дополнение (до множества $\{0, 1\}^*$) к конечному множеству слов;
    2) Множество всех слов, представимых в виде произведения заданных слов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$;
    3) Множество всех слов, содержащих в качестве подслова одно из слов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$;

4) Множество всех слов, длины которых имеют вид $5k+1$ или $5k+3$;

5) Множество всех слов, которые не содержат слово 01;

6) Множество всех слов, которые не содержат ни одно из заданных слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ (использовать теорему Клини).

17. Привести пример бесконечного регулярного множества, которое невозможно получить:

1) С однократным использованием операции $*$;

2) С n-кратным использованием операции $*$, $n \geqslant 2$.

18. Пусть X — регулярное множество в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$, $Y_1, \ldots, Y_m$ — произвольные регулярные множества. Доказать, что множество $S^{a_1 \ldots a_m}_{Y_1 \ldots Y_m} X$, полученное в результате одновременной замены букв $a_1, \ldots, a_m$ в любом слове из X множествами $Y_1, \ldots, Y_m$, является регулярным множеством.

19. Пусть X — множество в алфавите A, B — непустое подмножество A. Обозначим через $\mathrm{Proj}_B(X)$ множество всех слов, которые можно получить из слов множества X вычёркиванием букв множества $A \backslash B$ (если слово не содержит букв из B, то в результате вычеркивания образуется пустое слово). Доказать, что для регулярного множества X множество $\mathrm{Proj}_B(X)$ также регулярно.

20. Пусть X — регулярное множество, $\mathrm{Rev}(X)$ — множество обращений всех слов из X (т.е. слов, прочитанных справа налево). Доказать, что множество $\mathrm{Rev}(X)$ регулярно.

21. Пусть X, Y — множества слов в алфавите A. Обозначим через $X \times Y$ множество всех слов в алфавите $A \times A$, которые имеют вид $(a_{i_1} a_{j_1})(a_{i_2} a_{j_2}) \ldots (a_{i_n} a_{j_n})$, где $a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in X$ и $a_{j_1} \ldots a_{j_n} \in Y$. С использованием теоремы Клини доказать, что для любых регулярных множеств X, Y множество $X \times Y$ также регулярно.

22. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите A, Y — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через X/Y множество всех тех слов из X, длины которых являются длинами слов из Y. Доказать, что множество X/Y конечно-автоматно.

23. Для автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ построить (недетерминированный) автомат, который допускает множество $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$:

1)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\}, \\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_1, \\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_3, \\
&f(0, q_3) = q_1, \quad f(1, q_3) = q_3, \\
&F = \{q_1, q_3\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2\}, \\
&f(0, q_1) = q_1, \quad f(1, q_1) = q_2, \\
&f(0, q_2) = q_1, \quad f(1, q_2) = q_2, \\
&F = \{q_2\};
\end{aligned}
$$

2)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_1) = q_1, \quad f(1, q_1) = q_2,\\
&f(0, q_2) = q_1, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&F = \{q_2\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_3,\\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&f(0, q_3) = q_3, \quad f(1, q_3) = q_1,\\
&F = \{q_2, q_3\}.
\end{aligned}$$

24. Для автомата $\mathcal{A}$ построить (недетерминированный) автомат $\mathcal{C}$, у которого $D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{A})^*$:

1) Автомат $\mathcal{A}$ из задачи 23 (1):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_1,\\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_3,\\
&f(0, q_3) = q_1, \quad f(1, q_3) = q_3,\\
&F = \{q_1, q_3\};
\end{aligned}$$

2) Автомат $\mathcal{B}$ из задачи 23 (2):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_3,\\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&f(0, q_3) = q_3, \quad f(1, q_3) = q_1,\\
&F = \{q_2, q_3\}.
\end{aligned}$$

Приложение 2: задачи к семинарам по частично рекурсивным функциям

Доказать частичную рекурсивность функций:

1. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ входит в пересечение областей значений} \\ & \text{примитивно-рекурсивных функций } g_1(z), g_2(z), \\ \text{не определено}, & \text{иначе}; \end{cases}$

2. $f^{-1}(x)$, где f — общерекурсивная перестановка (биективная функция) на $\mathbb{N}_0$;

3. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \{a_1, \ldots, a_m\}, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases} \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0;$

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ входит в область значений функции } g, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, например, $z^2, 2^z$;

5. $f(x) = \begin{cases} x, & f_1(x) \geqslant f_2(x), \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

   $f_1(x), f_2(x)$ — примитивно-рекурсивные функции;

6. $x - y$;

7. x/y;

8. $\sqrt{x}$;

9. $\log_2 x$;

10. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть две единицы на расстоянии } x+1, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

    $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность);

11. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть } x+1 \text{ идущих подряд единиц}, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

    $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность).

Приложение 3: задачи к семинарам по классам сложности

1. Пусть *входом* задачи L является слово $\alpha \in A^*$, где $A = \{0, 1\}$. Докажите, что задача L принадлежит классу P, если *вопрос* этой задачи следующий:

   1) верно ли, что число единиц слова α делится на 3;

   2) верно ли, что длина слова α нечетна;

   3) верно ли, что слово α не содержит подслово 101;

   4) верно ли, что слово α не является записью степени двойки в двоичной системе счисления;

   5) верно ли, что слово α является палиндромом;

   6) верно ли, что слово α содержит равное число нулей и единиц;

   7) верно ли, что в любой начальной части слова α число нулей не больше числа единиц;

   8) верно ли, что слово α является периодическим (т. е. что найдется такое слово $\beta \in A^*$, что $\alpha = \underbrace{\beta\beta\ldots\beta}_{n}$, где $n \geqslant 2$)?

   Постройте машину Тьюринга, решающую задачу L с полиномиальной сложностью; оцените полученную сложность $T(n)$.

2. Пусть $A = \{0, 1\}$ и $L \subseteq A^*$. Докажите, что множество (язык) L принадлежит классу P, если множество L содержит все слова из A^*, которые:

   1) содержат не менее трех нулей;

   2) содержат подслово 010;

   3) являются векторами значений функций алгебры логики;

   4) являются векторами значений функций алгебры логики, не сохраняющих 1.

Постройте машину Тьюринга, распознающую множество L с полиномиальной сложностью; оцените полученную сложность $T(n)$.

3. Пусть *входом* задачи L является КНФ K, записанная словом в известном конечном алфавите A. Докажите, что задача L принадлежит классу NP, если *вопрос* этой задачи следующий:

   1) существует ли набор, на котором КНФ K равна 1;

   2) существует ли набор, на котором КНФ K равна 0;

   3) существуют ли два противоположных набора, на которых КНФ K принимает одинаковые значения;

   4) существуют ли два соседних набора, на которых КНФ K принимает противоположные значения?

4. Пусть *входом* задачи L является граф $G = (V, E)$, заданный множеством вершин и множеством ребер, и число k. Докажите, что задача L принадлежит классу NP, если *вопрос* этой задачи следующий:

   1) существует ли в графе G простой цикл, содержащий не менее k ребер;

   2) существует ли в графе G полный подграф, содержащий не менее k вершин;

   3) можно ли вершины графа G разбить на k множеств, чтобы не нашлось ребер, соединяющих вершины из одного множества;

   4) можно ли в графе G удалить k ребер, чтобы остался несвязный граф?

5. По *входу* K задачи ВЫП постройте *вход* K' задачи 3-ВЫП в соответствиии с полиномиальным сведением первой задачи ко второй, если:

   1) $K = (x_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)$;

   2) $K = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$;

   3) $K = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_6)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6)$;

   4) $K = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_6)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_6)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)$.

   Покажите, как по набору, на котором выполняется КНФ K, построить набор, на котором выполняется КНФ K', и наоборот.

6. Полиномиальным алгоритмом проверьте выполнимость 2-КНФ K, если

   1) $K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)$;

   2) $K = x_1(x_2 \vee \bar{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\bar{x}_4$;

   3) $K = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_4)$;

   4) $K = (x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee x_4)$.