

# Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Весенний семестр 2014–2015 уч. г.  
группы 320–328, 318

лектор — профессор С. А. Ложкин  
(lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса по адресам:

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы\\_кибернетики\\_\(3-й\\_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток))

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы\\_кибернетики\\_\(318,\\_418\\_группы\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(318,_418_группы))

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ

**Утверждение 1.1.** Совершенная ДНФ ФАЛ  $f$ ,  $f \neq 0$ ,  $f \in P_2(n)$ , является единственной ДНФ от БП  $X(n)$ , которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве  $N_f$  нет соседних наборов.

**Следствие.** Совершенная ДНФ ФАЛ  $\ell$ ,  $\bar{\ell}$ , является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП  $X(n)$ .

## 2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

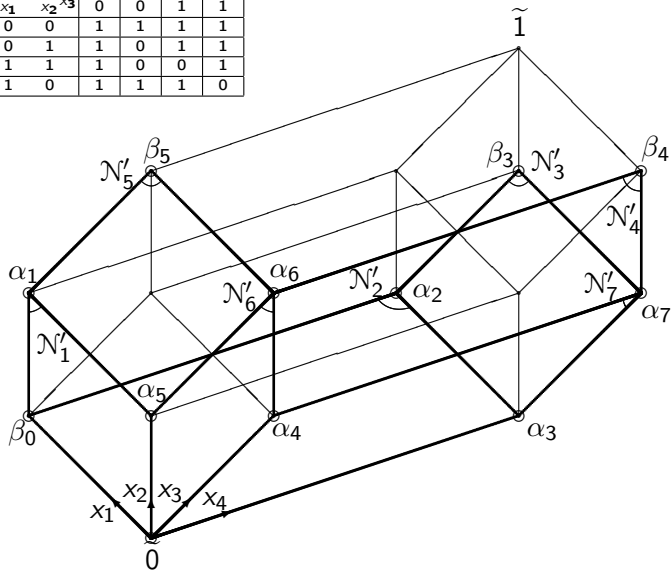
**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  — сокращенные ДНФ ФАЛ  $f'$  и  $f''$  соответственно, а ДНФ  $\mathcal{A}$  без поглощений ЭК получается из формулы  $\mathcal{A}' \cdot \mathcal{A}''$  в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда  $\mathcal{A}$  — сокращенная ДНФ ФАЛ  $f = f' \cdot f''$ .

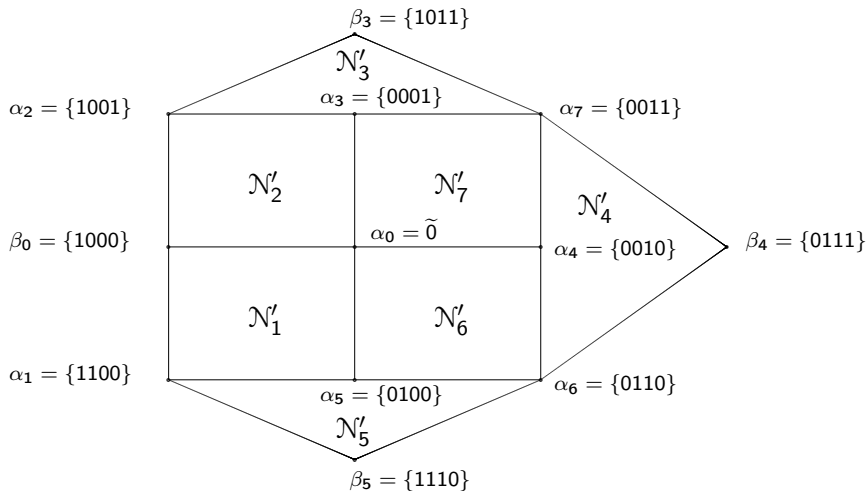
**Следствие.** Если ДНФ  $\mathcal{A}$  без поглощений ЭК получается из КНФ  $\mathcal{B}$  ФАЛ  $f$  в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то  $\mathcal{A}$  — сокращенная ДНФ ФАЛ  $f$ .

**Утверждение 2.2.** ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

**Следствие.** Из любой ДНФ  $\mathcal{A}$  ФАЛ  $f$  можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0

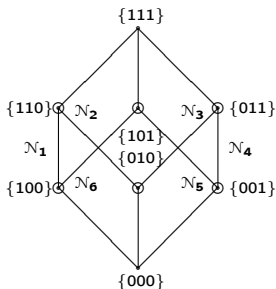




$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$



$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\bar{x}_2x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2}_{K_6}.$$



$$\bar{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и  
ДНФ пересечение тупиковых.  
ДНФ Квайна, критерий  
вхождения простых  
импликант в ДНФ сумма  
тупиковых, его локальность.

**Утверждение 3.1.** Дизъюнктивная нормальная форма  $\cap T$  ФАЛ  $f$  состоит из тех простых импликант ФАЛ  $f$ , которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

**Следствие.** Сокращенная ДНФ ФАЛ  $f$  является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда  $f$  — ядровая ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

**Утверждение 3.2.** Простая импликанта  $K$  ФАЛ  $f$  входит в ДНФ  $\Sigma T$  тогда и только тогда, когда грань  $N_K$  не является регулярной гранью этой ФАЛ.

# 4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ.

**Утверждение 4.1.** Сокращенная ДНФ  $\mathfrak{A}$  монотонной ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_{\beta}^+(x_1, \dots, x_n).$$

При этом все наборы из  $N_f^+$  являются ядровыми точками ФАЛ  $f$ .

**Следствие.** Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

**Утверждение 4.2.** Функция покрытия  $F(y_1, \dots, y_p)$  матрицы  $M$ ,  $M \in B^{p,s}$ , без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left( \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M\langle i,j \rangle = 1}} y_i \right).$$

**Следствие.** В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ  $F(y)$ , простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы  $M$ .

5. Градиентный алгоритм и  
оценка длины градиентного  
покрытия, лемма о  
протыкающих наборах.  
Использование градиентного  
алгоритма для построения  
ДНФ



**Утверждение 5.1** Пусть для действительного  $\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , в каждом столбце матрицы  $M$ ,  $M \in B^{p,s}$ , имеется не меньше, чем  $\gamma \cdot p$ , единиц. Тогда покрытие матрицы  $M$ , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

$$\text{где } \ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geq 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

**Утверждение 5.2** При любых натуральных  $n$  и  $m$ ,  $m \leq n$ , в кубе  $B^n$  всегда найдется подмножество мощности не более, чем  $n \cdot 2^m$ , протыкающее все грани ранга  $m$ .

## 6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ.

**Утверждение 6.1** Для любого  $n, n \in \mathbb{N}$ ,  
имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

**Утверждение 6.2** Для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})),$$

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})).$$

7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных.

**Утверждение 7.1** Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ  $f$  из  $P_2(n)$ ,  $n \geq 4$ , вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \dots \oplus x_n),$$

где  $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$ , равно  $5^{2^{n-4}}$  (соответственно  $2^{2^{n-4}}$ ).

**Следствие**

$$\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}, \quad \mu_n(n) \geq 2^{2^{n-4}}.$$

## Утверждение 7.2

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geq e_1 \frac{3^n}{n},$$

где  $e_1$  — некоторая константа.

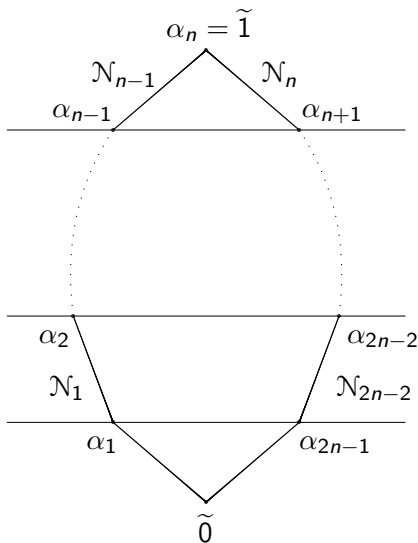


Рис.: цепная ФАЛ длины  $(2n - 2)$  в кубе  $B^n$

**Утверждение 7.3** При любом  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , в  $P_2(n)$  существуют ФАЛ  $f'$  и  $f''$ , имеющие общую простую импликанту  $K$ , которая входит в ДНФ  $\Sigma M$  одной, но не входит в ДНФ  $\Sigma M$  другой из этих ФАЛ и для которой  $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$ .



*Замечание* Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ  $\Sigma M$  не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ  $\Sigma T$ .

*Замечание* Известно, что при  $n \geq 14$  в  $P_2(n)$  имеется цепная ФАЛ четной длины  $t$ ,  $t \geq 2^{n-11} - 4$ , на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка  $(\frac{t}{2} - 2)$ .

## II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

8. Формулы и способы их задания,  
эквивалентность формул и  
функционалы их сложности.  
Оптимизация подобных формул по  
глубине

**Утверждение 8.1** Для формулы  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$ , выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})},$$

где  $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$  — число ФС  $\&$  и  $\vee$  в формуле  $\mathcal{F}$ .

**Следствие**

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil.$$

**Утверждение 8.2** Для любой формулы  $\mathcal{F}$  с поднятыми отрицаниями из  $\mathcal{U}^\Phi$  существует подобная ей формула  $\check{\mathcal{F}}$  такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}).$$

**Следствие 1.** Для любой ЭК или ЭД  $K$  существует подобная ей формула  $\check{K}$  такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$

которая, минимальна по глубине.

**Следствие 2.** Для любой ДНФ или КНФ  $\mathfrak{A}$  существует подобная ей формула  $\check{\mathfrak{A}}$  такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

9. Схемы из функциональных элементов и операции их приведения. Оценка числа формул и схем в базисе  $\{\&, \vee, \neg\}$

**Утверждение 9.1** Для приведенной СФЭ  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}^C$ , с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)},$$

где  $L_{\&, \vee}$  — число ФЭ  $\&$  и  $\vee$  в  $\Sigma$ .



**Утверждение 9.2** Для любых натуральных  $n$ ,  $L$ ,  $D$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}^\Phi(L, n)| &\leq (10n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| &\leq (8n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| &\leq (8n)^{2^D}. \end{aligned}$$

**Следствие** Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями ранга  $R$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  не больше, чем  $(12n)^R$ .

**Утверждение 9.3** Для любых натуральных  $n$  и  $L$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}.$$

10. Контактные схемы и  $\pi$ -схемы,  
моделирование формул и  $\pi$ -схем.  
Оценка числа контактных схем и  
 $\pi$ -схем, особенности  
функционирования многополюсных  
схем

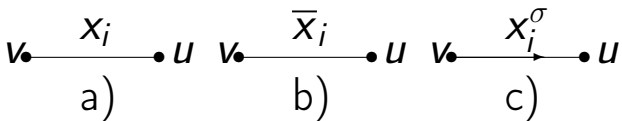


Рис.: типы контактов

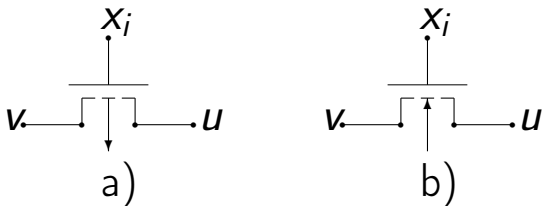
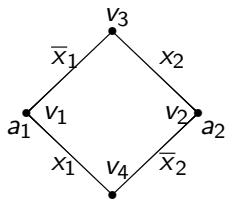
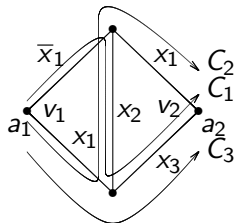


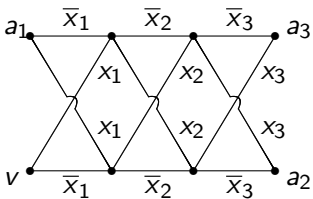
Рис.: физическая интерпретация контактов



a)



b)



c)

Рис.: некоторые КС от БП  $x_1, x_2, x_3$

**Утверждение 10.1** Любой  $\pi$ -схеме  $\Sigma$  можно сопоставить эквивалентную ей формулу  $\mathcal{F}$  из  $\mathcal{U}^\Phi$  с поднятыми отрицаниями такую, что  $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$  и обратно.

**Утверждение 10.2** При любых натуральных  $L$  и  $n$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L.$$

**Утверждение 10.3** При любых натуральных  $L$  и  $n$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

11 Эквивалентные  
преобразования формул с  
помощью тождеств. Полнота  
системы основных тождеств  
для эквивалентных  
преобразований формул  
базиса  $\{\&, \vee, \neg\}$



$$\tau^{\text{OCH}} = \{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}, t_{\&}^{\text{A}}, t_{\&}^{\text{K}}, t_{\&}^{\text{OP}}, t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{1,\&}^{\text{PK}}, t_{0,\&}^{\text{PK}}\},$$

$$\tau^{\text{A}} = \{t_{\&}^{\text{A}}, t_{\vee}^{\text{A}}\},$$

$$\tau^{\text{K}} = \{t_{\&}^{\text{K}}, t_{\vee}^{\text{K}}\},$$

$$\tau^{\text{OP}} = \{t_{\&}^{\text{OP}}, t_{\vee}^{\text{OP}}\},$$

$$\tau^{\text{D}} = \{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\vee,\&}^{\text{D}}\},$$

$$\tau^{\text{PK}} = \{t_{0,\&}^{\text{PK}}, t_{1,\&}^{\text{PK}}, t_{0,\vee}^{\text{PK}}, t_{1,\vee}^{\text{PK}}\},$$

$$\widetilde{\tau}^{\text{OCH}} = \{\tau^{\text{M}}, \tau^{\text{A}}, \tau^{\text{K}}, \tau^{\text{OP}}, \tau^{\text{D}}, \tau^{\text{PK}}, t^{\text{P}}\}.$$

**Утверждение 11.1** Система  $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$   
выводима из системы  $\tau^{\text{осн}}$ .

**Утверждение 11.2** Любую формулу  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ , реализующую ФАЛ  $f$ , с помощью ЭП на основе системы тождеств  $\tau^{\text{осн}}$  можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ  $f$  от БП  $X(n)$ .

**Утверждение 11.3** Система  $\tau^{\text{осн}}$  —  
полная система тождеств.

12. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований.

Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

**Утверждение 12.1** Если  $\tau$  — конечная полная система тождеств для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , то  $\{\underline{\tau}, \tau^C, \tau^B\}$  — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из  $\mathcal{U}_B^C$

**Следствие** Система тождеств  $\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^B, \tau^C\}$  — КПСТ для ЭП СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ .

**Утверждение 12.2** Пусть  $\tau$  — КПСТ для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , а  $P'$  и  $P$  — системы тождеств для перехода от базиса  $B$  к базису  $B'$  и от базиса  $B'$  к базису  $B$  соответственно. Тогда система тождеств  $\{P'(\tau), P(P)\}$  является КПСТ для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ .

**Следствие** Из системы тождеств  $\tau^{\text{осн}}$  для ЭП формул из  $\mathcal{U}^\Phi$  указанным в утверждении способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе  $B$ .

# 13. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств

**Утверждение 13.1** Имеет место выводимость  $\{t_1-t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \vdash \{t_7-t_{11}\}$ .

**Утверждение 13.2** При  $n \geq 2$  имеет место выводимость  $\tau_n \vdash \tau^{(n)}$ .

# 14. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем



**Утверждение 14.1** Для любой КС  $\Sigma$ , где  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{U}^K$ , и любой эквивалентной  $\Sigma$  КС  $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$  канонического вида существует ЭП  $\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}$ .

**Утверждение 14.2** Для любых двух эквивалентных КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  существует ЭП вида  $\Sigma' \xRightarrow{\tau_n} \Sigma''$ .

**Следствие** Система  $\tau_n$  является КПСТ для ЭП КС из  $\mathcal{U}^K$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ .

**Следствие** Система  $\tau_\infty$  является ПСТ для ЭП КС из  $\mathcal{U}^K$ .

**Утверждение 14.3** Если

$\Sigma' (x_1, \dots, x_n) \xRightarrow{\{t_1-t_5\}} \Sigma'' (x_1, \dots, x_n)$ , то

$\Theta (\Sigma') = \Theta (\Sigma'')$ , а если  $\Sigma' \xRightarrow{\tau_k} \Sigma''$ , где  $k < n$ ,

то  $\Theta (\Sigma') - \Theta (\Sigma'')$  делится на  $2^{n-k}$ .

**Утверждение 14.4** В классе  $\mathcal{U}^K$  не существует конечной полной системы тождеств.

# III. Синтез и сложность управляющих систем

# 15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций

**Утверждение 15.1** Для любой функции алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f \neq 0$ , существуют формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , и  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|,$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leq \lceil \log(n \cdot |N_f|) \rceil + 2.$$

**Следствие 1.** В силу указанных неравенств, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать  $\pi$ -схемой сложности 2, а также формулой из  $\mathcal{U}^\Phi$ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства

$$L^C(n) \leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^K(n) \leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n.$$

**Следствие 2.**

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

**Утверждение 15.2** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$  и  $f \neq 0$ , существуют  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$  и формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2,$$
$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

**Следствие**

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2,$$
$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4.$$



Функции, встречающиеся в приложениях:

1. линейная ФАЛ порядка  $n$ , то есть ФАЛ  $\ell_n$  или ФАЛ  $\bar{\ell}_n$ ;
2. мультиплексорная ФАЛ  $\mu_n$  порядка  $n$ ;
3. дешифратор  $\vec{Q}_n$  (дизъюнктивный дешифратор  $\vec{J}_n$ ) порядка  $n$ ;
4. универсальная система  $\vec{P}_2(n)$  порядка  $n$ , состоящая из всех различных ФАЛ множества  $P_2(n)$ , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

**Утверждение 15.3** Для любого натурального  $n$  в  $\mathcal{U}_B^C$  существует универсальная СФЭ порядка  $n$ , сложность которой равна  $2^{2^n} - n$ .

**Следствие**

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

# 16. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем

**Утверждение 16.1** Если ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n.$$

Если при этом ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ (каждая БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ ), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n+k).$$

## Следствие

$$L^C(\ell_n) \geq n,$$

$$L^K(\ell_n) \geq 2n,$$

$$L^C(\mu_n) \geq 2^n + n,$$

$$L^K(\mu_n) \geq 2^n + 2n.$$

**Утверждение 16.2** Для системы  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m).$$

## Следствие

$$L^C(\vec{Q}_n) \geq 2^n, \quad L^K(\vec{Q}_n) \geq 2^n,$$

$$L^C(\vec{J}_n) \geq 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \geq 2^n,$$

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - n, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - 2$$

**Замечание** В силу следствия универсальная СФЭ  $U_n$ , построенная в утв. 15.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе  $\mathcal{U}_B^C$ .

**Утверждение 16.3** Если для ФАЛ  $f \in P_2(n)$ , и для любого  $\sigma, \sigma \in B$ , ФАЛ  $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$ , то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=0}), L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=1})\} + 2.$$

**Следствие**

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1.$$



**Утверждение 16.4** Если система ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  состоит из попарно различных ФАЛ от БП  $X(n)$ , отличных от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

**Следствие**  $L^K(\vec{J}_n) \geq 2^{n+1} - 2$

**Утверждение 16.5** Для любого натурального  $n$  выполняются неравенства:

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \lfloor 1/n \rfloor;$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3;$$

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}), \quad L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2;$$

$$L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}).$$

**Следствие**

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

# 17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

**Утверждение 17.1.** Пусть КС  $\Sigma$  является результатом стыковки вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , а  $F$ ,  $F'$  и  $F''$  — матрицы, реализуемые КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно. Тогда

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.

**Следствие 1.** В случае разделительности КС  $\Sigma''$  по входам в каждой вершине КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , которая соответствует выходу КС  $\Sigma'$ , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС  $\Sigma'$ .

**Следствие 2.** Равенство  $F = F' \cdot F''$  выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.

**Замечание.** Отождествление входов (выходов) у разделительной по входам (выходам) КС дает разделительную по рассматриваемой группе полюсов КС.

18. Каскадные контактные  
схемы и схемы из  
функциональных элементов.  
Метод каскадов и примеры  
его применения, метод  
Шеннона

**Утверждение 18.1** Если  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma'$  реализует систему ФАЛ  $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$ , то существует  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma''$ , которая реализует систему ФАЛ  $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$  и для которой  $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$ .



**Утверждение 18.2** Для любого натурального  $n$  и  $\sigma \in B$  выполняются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$
$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

**Утверждение 18.3** Для функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$  выполнены соотношения:

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

# 19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для ФАЛ из специальных классов

**Утверждение 19.1** Для некоторых последовательностей  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$ , где  $i = 1, \dots, 4$ , и  $n = 1, 2, \dots$ , таких, что  $\varepsilon_i(n) \geq 0$  при  $n \geq n_0$  и  $\varepsilon_i(n)$  стремится к 0 при  $n$  стремящемся к бесконечности для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства:

$$L^K(f) \geq \left(1 - \varepsilon_1(n)\right) \frac{2^n}{n}, \quad L^C(f) \geq \left(1 + \varepsilon_2(n)\right) \frac{2^n}{n},$$

$$L^\Phi(f) \geq \left(1 - \varepsilon_3(n)\right) \frac{2^n}{\log n}, \quad D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_4(n).$$

## Следствие

$$D(n) \geq \lceil n - \log \log n - o(1) \rceil,$$

$$L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

## Утверждение 19.2

Для класса ФАЛ  $\mathcal{Q}$  такого, что

$$n = o\left(\frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}\right)$$
$$(\log n = o(\log \log |\mathcal{Q}(n)|)),$$

выполняются асимптотические неравенства

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}$$

$$(\text{соответственно } L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}).$$

20. Дизъюнктивно-  
универсальные множества  
функций. Асимптотически  
наилучший метод О. Б.  
Лупанова для синтеза схем из  
функциональных элементов в  
базисе  $\{\&, \vee, \neg\}$

**Утверждение 20.1** Для любых натуральных  $p$ ,  $m$  и  $s$ , где  $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$ , существует стандартное ДУМ  $G$  порядка  $m$  и высоты  $s$ , которое является ДУМ ранга  $p$  и для которого:

1)  $\lambda = |G| \leq p2^s$ ;

2) система из  $p$  характеристических ФАЛ  $\psi_1, \dots, \psi_p$  ДУМ  $G$  обладает тем свойством, что для любой ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , и соответствующих ФАЛ  $g_1, \dots, g_p$  из  $G$  справедливы представления

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p = \psi_1 g_1 \vee \dots \vee \psi_p g_p.$$



**Утверждение 20.2** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая её СФЭ  $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ , такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right).$$

**Следствие.** Из этого утверждения с учетом следствия из утверждения 20.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

21. Регулярные разбиения  
единичного куба и  
моделирование функций  
переменными.

Асимптотически наилучший  
метод синтеза формул в  
базисе  $\{\&, \vee, \neg\}$ .

**Утверждение 21.1** Для любых натуральных  $m$ ,  $\lambda$  и  $q = m + \lambda$  и для любой системы ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$  из  $P_2^\lambda(m)$  существует  $m$ -регулярное разбиение  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2q-m})$  куба  $B^q$  такое, что любая ФАЛ  $g_i$  на любой компоненте  $\delta_j$  совпадает либо с одной из БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ , либо с ее отрицанием.

**Замечание.** Если в условиях утверждения  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j - 1)$ , то  $g_i \equiv x_{i+m}^{\overline{\alpha_j}}$  на  $\delta_j$ .

**Утверждение 21.2** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , в  $\mathcal{U}^\Phi$  существует реализующая ее формула  $\mathcal{F}_f$ , для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left( 1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right).$$

**Следствие.** Из этих оценок с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

## 22. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых специальных классов

**Утверждение 22.1** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая ее КС  $\Sigma_f$  такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

**Следствие.** Из этой оценки с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

**Замечание.** Построенную КС  $\Sigma_f$  можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.