Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Элементы теории синтеза дискретных управляющих систем

Москва — 2016

Оглавление

Глава 1

Асимптотически наилучшие методы синтеза схем в некоторых моделях дискретных управляющих систем

§1 Формулы и СФЭ в произвольном базисе, функционалы их сложности. Верхние оценки числа формул и СФЭ

Продолжим начатое в [3, Гл. 2, 4] изучение формул и схем из функциональных элементов (СФЭ) над произвольным конечным полным базисом Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$ реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих переменных.

Будем по-прежнему (ср. [3, Гл. 2, §3]) представлять СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(x; z)$, если $x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_n})$ — наборы, составленные из всех её различных входных и выходных булевых переменных (БП), перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавитах $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\}$, соответственно. Сложность, то есть число ФЭ, глубину, то есть максимальное число последовательно соединённых ФЭ, и ранг, то есть число дуг, исходящих из входов, в схеме Σ, следуя [3], будем обозначать через $L(\Sigma)$, $D(\Sigma)$ и $R(\Sigma)$ соответственно.

Введём теперь «взвешенные» функционалы сложности и глубины СФЭ. Будем считать, что каждому функциональному элементу $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, сопоставлены положительные действительные числа $\mathcal{L}_i$ и T_i, называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность («размер») и время срабатывания $\mathcal{E}_i$ соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса Б$_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1. Если (v_0, v_t)-цепь C длины t в СФЭ Σ проходит через вершины $v_1, \ldots, v_{t-1}$, и вершине v_j, $j = 1, \ldots, t$, при этом соответствует ФЭ $\mathcal{E}_{i_j}$ базиса Б, то число $T(C) = T_{i_1} + \cdots + T_{i_t}$ будем называть *задержкой* этой цепи.

По аналогии с глубиной определим *задержку* вершины v СФЭ Σ как максимальную задержку тех цепей Σ, которые начинаются в одной из ее входных вершин и заканчиваются в вершине v. Для каждой СФЭ Σ над базисом Б помимо сложности $L(\Sigma)$, глубины $D(\Sigma)$ и ранга $R(\Sigma)$ определим следующие параметры (функционалы сложности):

1) $\mathcal{L}(\Sigma)$ — *размер* Σ, то есть сумма «весов» всех её ФЭ;

2) $T(\Sigma)$ — *задержка* Σ, то есть максимальная задержка её вершин.

Заметим, что функционал L (D) является частным случаем функционала $\mathcal{L}$ (соответственно

T), когда веса (соответственно задержки) всех ФЭ базиса Б равны 1. Введем также «частичный» размер $\mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma)$ (задержку $T_{\text{Б}'}(\Sigma)$), который равен сумме весов ФЭ Σ типа $\mathcal{E}_i$, где $\mathcal{E}_i \in \text{Б}'$, в СФЭ Σ (соответственно максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида, лежащих на одной цепи Σ). Аналогичным образом вводится «частичная» сложность $L_{\text{Б}'}(\Sigma)$ и «частичная» глубина $D_{\text{Б}'}(\Sigma)$ для СФЭ Σ.

Напомним (см. [3]), что СФЭ называется *приведённой*, если выход любого её ФЭ, не являющийся выходом схемы, поступает на вход другого ФЭ этой схемы. Приведённая СФЭ (системы формул) считается *строго приведённой*, если в ней нет эквивалентных вершин, то есть вершин, в которых реализуются равные ФАЛ (соответственно нет эквивалентных вершин, лежащих на одно цепи). Заметим, что для любой СФЭ (системы формул) Σ существует эквивалентная ей строго приведённая СФЭ (соответственно система формул) Σ', для которой

$$\mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma') \leqslant \mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma) \quad \text{и} \quad T_{\text{Б}'}(\Sigma') \leqslant T_{\text{Б}'}(\Sigma)$$

при любом $\text{Б}' \subseteq \text{Б}$. Легко видеть также, что в строго приведённой формуле или СФЭ нет трёх или более последовательно соединённых одновходовых ФЭ.

Для базиса $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ положим $\widehat{\text{Б}} = \{\, \mathcal{E}_i \mid k_i \geqslant 2 \,\}$ и заметим, что множество $\widehat{\text{Б}}$ не пусто в силу полноты базиса Б. Для ФЭ $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}$, определим его *приведённый вес* ρ_i и *приведённую задержку* τ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}, \qquad \tau_i = \frac{T_i}{\log k_i}.$$

Введём, далее, величины

$$\rho_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \rho_i \quad \text{и} \quad \tau_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \tau_i,$$

которые назовём *приведённым весом* и *приведённой задержкой базиса* Б соответственно. Для стандартного базиса $\text{Б}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, очевидно, $\widehat{\text{Б}}_0 = \{\&, \vee\}$, $\rho_{\text{Б}_0} = \tau_{\text{Б}_0} = 1$. Для функционала сложности ψ типа L, $\mathcal{L}$, D, T через $\widehat{\psi}(\Sigma)$ будем обозначать величину $\psi_{\widehat{\text{Б}}}(\Sigma)$.

Следуя [3] обозначим через $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{УС}}$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ множество СФЭ над базисом Б, множество усилительных СФЭ над Б и множество формул над Б соответственно. При этом для каждого A, $A \in \{\text{С}, \Phi\}$, определим размер $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(F)$ ФАЛ или системы ФАЛ F в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$ и её задержку $T_{\text{Б}}(F)$ обычным образом, а через $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n)$ и $T_{\text{Б}}(n)$ обозначим соответствующие функции Шеннона.

Лемма 1.1. *Для любой формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, выполняются неравенства*

$$R(\mathcal{F}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1, \qquad R(\mathcal{F}) \leqslant 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, формула $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$. При этом для числа ребер квазидерева $\mathcal{F}$ будут выполняться равенства

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^{b} s_i \cdot k_i = R(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{b} s_i - 1.$$

Следовательно,

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 = \sum_{k_i \geqslant 2} \frac{k_i - 1}{\mathcal{L}_i} \cdot \mathcal{L}_i s_i + 1 \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \sum_{k_i \geqslant 2} \mathcal{L}_i s_i + 1 = \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1$$

и первое неравенство (1.1) доказано.

Второе неравенство (1.1) доказывается индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, при $D(\mathcal{F}) = 0$, когда $\mathcal{F} = x_j$, оно, очевидно, выполняется. Пусть теперь второе неравенство (1.1) верно для любой формулы глубины меньше, чем d, и пусть $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$, где $D(\mathcal{F}) = d$ и $D(\mathcal{F}_j) < d$, $\widehat{T}(\mathcal{F}_j) = t_j$ при всех $j = 1, \ldots, k_i$. Тогда

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_i} R(\mathcal{F}_j) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}},$$

где $t = \max_{1 \leqslant j \leqslant k_i} t_j$. Следовательно, при $k_i = 1$ формула $\mathcal{F}$ удовлетворяет второму неравенству (1.1), так как в этом случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t$. При $k_i \geqslant 2$ в соответствии с определением $\tau_{\text{Б}}$ выполняется неравенство

$$k_i \leqslant 2^{\frac{T_i}{\tau_{\text{Б}}}},$$

используя которое и учитывая, что в данном случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t + T_i$, получим

$$R(\mathcal{F}) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}} \leqslant 2^{\frac{t+T_i}{\tau_{\text{Б}}}} = 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Аналогично первому неравенству (1.1) доказывается, что число рёбер дерева, соответствующего формуле $\mathcal{F}$, в которой нет трёх и более последовательно соединённых одновходовых ФЭ, удовлетворяет неравенству

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big). \tag{1.2}$$

Действительно, если $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, то

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 \geqslant \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1,$$

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 3\big(R(\mathcal{F}) + \widehat{L}(\mathcal{F}) - 1\big) \leqslant 3\big(2R(\mathcal{F}) - 2\big) = 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big).$$

Неравенство (1.2) выполняется, в частности, для строго приведённой формулы $\mathcal{F}$.

Для приведённой одновыходной СФЭ Σ на базисом Б её *остовом* будем называть такую формулу $\mathcal{F}(x_1)$ над Б, дерево которой получается в результате применения к каждой вершине Σ операций отсоединения всех исходящих дуг, кроме одной, и объявления начальных вершин этих дуг листьями указанного дерева.

Пусть для $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}} \langle \mathcal{L}, n \rangle$ ($\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}} \langle \mathcal{L}, n \rangle$, $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}} \{T, n\}$) — множество всех строго приведённых[1] схем из функциональных элементов вида $\Sigma(x_1, \ldots, x_n;\ z_1)$ из $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$ (соответственно формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$), для которых $\mathcal{L}(\Sigma) \leqslant \mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \leqslant \mathcal{L}$, $T(\mathcal{F}) \leqslant T$).

[1]Напомним [3], что СФЭ является *приведённой*, если в ней нет «висячих» вершин и *строго приведённой*, если в ней, кроме того, нет вершин, в которых реализуются равные ФАЛ.

Лемма 1.2. *Для любых $\mathcal{L} \geqslant 0$, $T \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства*[2]*:*

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}\left\langle\mathcal{L}, n\right\rangle\right\| \leqslant (c_1(\mathcal{L}+n))^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.3}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\left\langle\mathcal{L}, n\right\rangle\right\| \leqslant (c_2 n)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.4}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\left\{T, n\right\}\right\| \leqslant (c_2 n)^{2^{\frac{T}{\tau_{\text{Б}}}}}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^{\text{С}}\left\langle\mathcal{L}, n\right\rangle$, а $\check{\mathcal{F}}$ — остов Σ. В силу леммы 1.1 и замечания к ней число рёбер в дереве формулы $\check{\mathcal{F}}$ не больше, чем $\widehat{c}_1\mathcal{L}$, где $\widehat{c}_1 = \frac{6}{\rho_{\text{Б}}}$, а число таких попарно не изоморфных формул не превосходит $c_2^{\mathcal{L}/\rho_{\text{Б}}}$, где $c_2 \leqslant 4^6$. Любая формула $\mathcal{F}$ (СФЭ Σ) из $\mathcal{U}^{\text{С}}\left\langle\mathcal{L}, n\right\rangle$ может быть получена в результате присоединения каждого из $R(\check{\mathcal{F}}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}(\check{\mathcal{F}}) + 1$ (в силу леммы 1.1) листьев дерева формулы $\check{\mathcal{F}}$, являющейся её остовом, к входам $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно к входам $x_1, \ldots, x_n$ и внутренним вершинам $\check{\mathcal{F}}$), которое можно осуществить не более, чем $n^{R(\check{\mathcal{F}})}$ (соответственно $(\widehat{c}_1 \cdot \mathcal{L} + n)^{R(\check{\mathcal{F}})}$) способами. Перемножая полученные оценки и учитывая (1.1) приходим к (1.3) с константой $c_1 = c_2 \max\{\widehat{c}_1, 1\}$ и (1.4).

В случае $\Sigma = \mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\left\{T, n\right\}$, рассуждая аналогично, приходим к (1.5) с учётом того, что число рёбер в формуле $\check{\mathcal{F}}$ не больше, чем $6 \cdot 2^{T/\tau_{\text{Б}}}$, число таких формул не превосходит $(c_2)^{2^{T/\tau_{\text{Б}}}}$, а их ранг ограничен сверху в силу (1.1) числом $2^{T/\tau_{\text{Б}}}$.

Лемма доказана. □

§2 Некоторые модификации контактных схем, итеративные контактные схемы. Верхние оценки числа схем контактного типа

§3 Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введённых в §1, §2 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [16, 6], который основан на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из рассмотренных в §1, §2 классов схем, Ψ — введённый там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно Ψ. Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leqslant \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$||\mathcal{U}\big(\Psi(n), n\big)|| = 2^{2^n}. \tag{3.1}$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}$, δ, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$||\mathcal{U}\big(\widehat{\Psi}, n\big)|| \leqslant \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то} \tag{3.2}$$

то $\Psi(f) \geqslant \widehat{\Psi}$ для не менее чем $(1-\delta) \cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

[2]Буквой c с различными индексами будем обозначать константы, зависящие только от базиса Б

Верхние оценки величины $||\mathcal{U}(\Psi, n)||$, установленные в §1, §2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (3.1)–(3.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. [3, Гл. 2, теорема 3.1 и лемма 5.3]) для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)| \leqslant (32(L+n))^{L+1}, \tag{3.3}$$

$$|\mathcal{U}^{\Phi}(L, n)| \leqslant (32n)^{L+1}, \tag{3.4}$$

$$|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L, n)| \leqslant (8nL)^{L}, \tag{3.5}$$

$$|\mathcal{U}^{\Phi}(T, n) \leqslant (64n)^{2^T}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Для $\gamma \in \{0, 1\}$ и положительных действительных чисел a, α, y, q таких, что*

$$(ay^{\gamma})^{\alpha y} \geqslant q, \tag{3.7}$$

в случае $\gamma = 1$ и $\frac{a}{\alpha} \log q > 1$ выполняется неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\alpha \log\left(\frac{a}{\alpha} \log q\right)} \left(1 + \frac{\log\log\left(\frac{a}{\alpha}\log q\right)}{\log\left(\frac{ae}{\alpha}\log q\right)}\right), \tag{3.8}$$

где e — основание натуральных логарифмов, а в случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ — неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\alpha \log a}. \tag{3.9}$$

Доказательство. В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (3.9) получается в результате логарифмирования (3.7) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 1$. В этом случае неравенство (3.8) следует из того, что левая часть (3.7) монотонно возрастает по y, и для

$$y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}, \qquad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\log\log\log q}{\log(e\log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y'\log y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}\big(\log\log q - \log\log\log q + \log e \ln(1+\varepsilon)\big) \leqslant \\ \leqslant \log q(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\log\log\log q}{\log\log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log\log q}\right) = \\ = \log q(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = \log q\big(1-\varepsilon^2\big) \leqslant \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, $a > 0$ неравенство (3.7) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geqslant q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (3.8) получается из неравенства $y \geqslant y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha}\log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$.

Лемма доказана. □

Теорема 3.1. *Для некоторой последовательности* $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *такой, что* $\varepsilon(n) \geqslant 0$ *при* $n \geqslant n_0$ *и* $\varepsilon(n)$ *стремится к* 0 *при* n *стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства*

$$L^{\text{С}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}(1 + \varepsilon(n)), \tag{3.10}$$

$$L^{\Phi}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log n}(1 - \varepsilon(n)), \tag{3.11}$$

$$L^{\text{К}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}(1 - \varepsilon(n)), \tag{3.12}$$

$$D(n) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon(n). \tag{3.13}$$

Доказательство. Неравенства (3.10)–(3.12) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем $\mathcal{U}$ с функционалом сложности L неравенства (3.3)–(3.5) на основе мощностного равенства (3.1) с использованием леммы 3.1, где $q = 2^{2^n}$, $\alpha = 1$ и

$$\begin{aligned}
&\gamma = 1, \quad a = 32, \quad\ \ y = L^{\text{С}}(n) + n, \quad \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\text{С}};\\
&\gamma = 0, \quad a = 32n, \quad y = L^{\Phi}(n) + 1, \quad \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\Phi};\\
&\gamma = 1, \quad a = 8n, \quad\ \ y = L^{\text{К}}(n), \qquad\quad \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\text{К}}.
\end{aligned}$$

Действительно, подставляя указанные значения в (3.8) и (3.9), получим

$$L^{\text{С}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n+5}\left(1 + \frac{\log(n+5)}{n+7}\right) - n \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\log n - 5 - o(1)}{n}\right), \tag{3.14}$$

$$L^{\Phi}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log n + 5} - 1 \geqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 - \frac{5 + o(1)}{\log n}\right), \tag{3.15}$$

$$L^{\text{К}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n + 3 + \log n}\left(1 + \frac{\log(n + 3 + \log n)}{n + 5 + \log n}\right) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 - \frac{3 + o(1)}{n}\right). \tag{3.16}$$

Следовательно, неравенство (3.10) ((3.11), (3.12)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon(n) = \frac{\log n - 6}{n}$ (соответственно $\varepsilon(n) = \frac{6}{\log n}$, $\varepsilon(n) = \frac{4}{n}$).

Аналогичным образом на основе неравенства (3.6) и равенства (3.1) с использованием леммы 3.1, где $q = 2^{2^n}$, $y = 2^{D(n)}$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$ и $a = 64n$, устанавливается справедливость (3.13) при $\varepsilon(n) = \frac{12}{\log n}$.

Теорема доказана. □

Следствие 1.

$$L^{\text{С}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^{\text{К}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$
$$T(n) \geqslant n - \log\log n - o(1).$$

Следствие 2. *Нижние оценки* (3.10)–(3.13) *при указанных в доказательстве значениях* $\varepsilon(n)$ *справедливы для сложности* (*глубины*) *почти всех ФАЛ* f, $f \in P_2(n)$, *при их реализации в соответствующих классах схем.*

Действительно, замена величины $q = 2^{2^n}$ величиной $q = \frac{1}{n}2^{2^n}$ при получении оценок (3.14)–(3.16) с помощью леммы 3.1 повлияет только на участвующие в их последних неравенствах функции вида $o(1)$. При этом, в силу (3.2), где $q = \frac{1}{n}$, а $\widehat{\Psi}$ — правая часть соответствующего неравенства (3.10)–(3.12), вновь полученная оценка будет справедлива для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$. Справедливость нижней оценки (3.13) для почти всех ФАЛ устанавливается аналогично.

Рассмотрим теперь мощностные нижние оценки для КС, ИКС, а также для СФЭ и формул в произвольном базисе Б. Следующее утверждение доказывается на основе мощностных соотношений (3.1), (3.2) и леммы 3.1 с использованием оценок §1, §2 аналогично тому, как доказывалась теорема 3.1.

Теорема 3.2. *Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{КС}}(n) \geqslant \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\bigl(1 - \varepsilon(n)\bigr), \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \geqslant \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\bigl(1 + \varepsilon(n)\bigr), \tag{3.18}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \geqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\bigl(1 + \varepsilon(n)\bigr), \tag{3.19}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\Phi}(n) \geqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}\bigl(1 - \varepsilon(n)\bigr), \tag{3.20}$$

$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}}\bigl(n - \log\log n - \varepsilon(n)\bigr). \tag{3.21}$$

Следствие 3.

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{КС}}(n) \gtrsim \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \gtrsim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\Phi}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n},$$
$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}}\bigl(n - \log\log n - o(1)\bigr).$$

Следствие 4. *Нижние оценки* (3.17)–(3.21) *справедливы для почти всех ФАЛ из* $P_2(n)$.

§4 Универсальные множества ФАЛ и их построение. Асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ и ИКС в произвольном базисе

Напомним (см. [3]), что множество ФАЛ G называется дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) ФАЛ порядка m и ранга p, тогда и только тогда, когда $G \subseteq P_2(m)$ и для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, найдутся функции $g_1, \ldots, g_p$ из G, для которых $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$.

Обобщим понятие ДУМ ФАЛ следующим образом. Пусть $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ — существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенно зависящая от всех своих БП. Множество ФАЛ G, $G \subseteq P_2(m)$, называется *ψ–универсальным множеством* (ψ–*УМ*) *порядка* m, если любая ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \psi(g_1, \ldots, g_p), \tag{4.1}$$

где $g_i \in G$ при всех i, $i = 1, \ldots, p$. Заметим, что в случае $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 \vee \cdots \vee y_p$ понятие ψ–УМ совпадает с понятием ДУМ ранга p.

Так же, как и ДУМ (см. [3]), будем строить ψ–УМ порядка m на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ единичного куба B^m. Для каждого i, $i = 1, \dots, p$, в силу существенной зависимости ФАЛ ψ от БП y_i найдётся набор двоичных констант $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p}$ такой, что

$$\psi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}. \tag{4.2}$$

Обозначим через $G^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$, множество всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые при любом i, $1 \leqslant i \leqslant p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_i, и пусть

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}. \tag{4.3}$$

Нетрудно убедиться в том, что равенство (4.1) имеет место для любой функции g, $g \in P_2(m)$, если g_i, $i = 1, \dots, p$, — ФАЛ из $G^{(i)}$, совпадающая на δ_i с ФАЛ $g \oplus \alpha_{i,i}$. Действительно, для любого i, $i = 1, \dots, p$, и любого набора β, $\beta \in \delta_i$, в силу (4.2), получим:

$$\psi\bigl(g_1(\beta), \dots, g_p(\beta)\bigr) = \psi\bigl(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1},\ g(\beta) \oplus \alpha_{i,i},\ \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}\bigr) = g(\beta).$$

Следовательно, множество G представляет собой ψ–УМ порядка m, которое будем называть *стандартным ψ–УМ, связанным с разбиением Δ*.

Приведём пример стандартного ψ–УМ для функции $\psi(y_1, \dots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee y_2 y_{t+2} \vee \dots \vee y_t y_{2t}$, где $p = 2t$, связанного с разбиением куба B^m на последовательные отрезки $\delta_1, \dots, \delta_p$ длины $s_1, \dots, s_p$ соответственно, где $s_1 + \dots + s_p = 2^m$. Если при этом константы в (4.2) выбрать так, что $\alpha_{i,j} = 1$ только тогда, когда $|i - j| = t$, то соответствующее стандартное ψ–УМ $\widetilde{G}$ порядка m будет иметь вид (4.3), где $G^{(j)}$ состоит из таких ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, для которых $g(\alpha) = 1$ при $\alpha \in \delta_i$, если $|i - j| = t$, и $g(\alpha) = 0$ на остальных отрезках δ_i, за исключением δ_j. Заметим, что полученное ψ–УМ $\widetilde{G}$ имеет мощность $t(2^{s'} + 2^{s''})$, если $|s_1| = \dots = |s_t| = s'$ и $s_{t+1} = \dots = |s_{2t}| = s''$, где $t(s' + s'') = 2^m$.

Используем построенные выше стандартные ψ–УМ для синтеза СФЭ в базисе Б, Б $=$ $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$. В силу полноты базиса Б в $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$ существуют формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, которыми мы будем заменять ФЭ базиса Б$_0$ при синтезе схем на основе конъюнктивных и дизъюнктивных представлений.

Теорема 4.1 (ср. [3]). *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \tag{4.4}$$

Доказательство. Найдём среди ФЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$, элемент $\mathcal{E}_j$, на котором достигается приведённый вес $\rho_j = \rho_{\text{Б}}$ (см. §1), то есть

$$\rho_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j - 1} = \min_{k_i \geqslant 2} \rho_i = \rho_{\text{Б}}. \tag{4.5}$$

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа такие, что

$$p = t(k_j - 1) + 1, \tag{4.6}$$

$$k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + (k_j - 1), \tag{4.7}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ — такое разбиение куба B^m на последовательные отрезки, что

$$|\pi_i| = s_i \leqslant s. \tag{4.8}$$

Построим из t ФЭ $\mathcal{E}_j$ бесповторную формулу $\mathcal{F}_t$ с p входами, которая имеет вид квазиполного l–ярусного, $l = \lceil \log_k p \rceil$, дерева и реализует ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$. Пусть G, $G \subseteq P_2(m)$, — стандартное ψ–УМ порядка m, связанное с разбиением Π, для которого в силу (4.6)–(4.8)

$$|G| = \lambda \leqslant p \cdot 2^s. \tag{4.9}$$

Искомая СФЭ Σ_f строится, как обычно, на основе разложения ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменным $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma''}(x'), \tag{4.10}$$

где $q = m$, $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, а $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. При этом для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, используется её представление

$$f_{\sigma''}(x') = \psi(g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}), \tag{4.11}$$

где ФАЛ $g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}$ берутся из множества G.

Для системы ФАЛ $\overrightarrow{G}$ построим реализующую её СФЭ Σ_G, $\Sigma_G \in \mathfrak{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, сложности не более чем $c \cdot p \cdot 2^{m+s}$ путём моделирования формулами в «базисе» $\mathcal{F}_{\&}, \mathcal{F}_{\vee}, \mathcal{F}_{\neg}$ π–схем, полученых в результате «вложения» в структуру контактного дерева совершенных ДНФ ФАЛ из G.

Пусть, далее, СФЭ Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и для каждого σ'', $\sigma'' \in B^{n-q}$, реализует ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в соответствии с (4.11), используя для этого формулу $\mathcal{F}_t$. Схема Σ_f представляет собой суперпозицию вида $\Sigma_f = \Sigma'(\Sigma'')$, где СФЭ Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от БП x'', и реализует ФАЛ f в соответствии с (4.10). Сложность построенной СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathfrak{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, с учётом (4.5)–(4.9) будет удовлетворять неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-m} + O\big(2^{n-m} + p \cdot 2^s + p \cdot 2^{s/2+m}\big), \tag{4.12}$$

из которого при

$$m = q = \lceil 2 \log n \rceil, \quad s = \lceil n - 5 \log n \rceil \tag{4.13}$$

и при значениях остальных параметров, определённых из (4.6)–(4.7), следует (4.4).

Теорема доказана. □

Следствие.

$$\mathcal{L}^{\text{С}}_{\text{Б}}(n) \sim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 4.2. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её ИКС $\widehat{\Sigma}_f$, $\widehat{\Sigma}_f \in \mathfrak{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\widehat{\Sigma}_f) \leqslant \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \tag{4.14}$$

Доказательство. Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\hat{\rho}_j = \hat{\rho}_{\text{Б}}$ (см. §2), то есть

$$\hat{\rho}_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j + 1} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \hat{\rho}_i = \hat{\rho}_{\text{Б}}. \tag{4.15}$$

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа такие, что

$$p = t(k_j + 1), \tag{4.16}$$

$$k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + k_j, \tag{4.17}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ — такое разбиение куба B^m на последовательные отрезки, что

$$|\pi_i| = s_i \leqslant s. \tag{4.18}$$

Пусть $(t,1)$–КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ над базисом Б представляет собой «звезду» из t управляемых непересекающимися наборами БП $y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}$ длины k_j контактов $\mathcal{K}_j$. При этом центр звезды является выходом КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, а её концевые вершины — проводящими входами $\widehat{\mathcal{F}}_t$, помеченными различными БП набора $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_t^{(0)})$. Таким образом, КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}(y_1, \ldots, y_p) = y_1^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(1)}\big) \vee \ldots \vee y_t^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(t)}\big).$$

Обозначим через $\widehat{G}$ стандартное $\widehat{\psi}$–УМ порядка m, построенное на основе разбиения Π так, что для любого набора $(g^{(1)}, \ldots, g^{(t)})$, составленного из ФАЛ G и связанного с набором БП $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(t)})$ и любого набора $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)})$ значений БП y не более одной из ФАЛ $\widehat{\varphi}_j\big(g^{(i)}(\alpha^{(i)})\big)$, где $i = 1, \ldots, t$, обращается в 1.

Построим ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ аналогично тому, как строилась СФЭ Σ_f при доказательстве теоремы 4.1, на основе разложений (4.10) и (4.11) с использованием ФАЛ $\widehat{\psi}$ вместо ФАЛ ψ, ИКС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ вместо формулы $\mathcal{F}_t$ и множества $\widehat{G}$ вместо множества G.

Заметим, что $\lambda = |\widehat{G}|$ по-прежнему удовлетворяет (4.9) и пусть $(1,\lambda)$–КС $\widehat{\Sigma}_G$ построена из контактов базиса Б, моделирующих замыкающий и размыкающий контакты стандартного базиса (см. §2), реализует систему из ФАЛ множества $\widehat{G}$ и имеет сложность

$$L\big(\widehat{\Sigma}_G\big) \leqslant \lambda \cdot 2^{m+1}.$$

Заметим также, что в силу $\widehat{\psi}$–универсальности множества ФАЛ $\widehat{G}$ для любой ФАЛ $g(x')$ справедливо представление

$$g\big(x'\big) = \widehat{\psi}\big(g_1, \ldots, g_p\big) \tag{4.19}$$

где $g_j \in \widehat{G}$ для всех j, $j = 1, \ldots, p$. Для реализации данного представления достаточно входы $y_1, \ldots, y_p$ КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ присоединить к выходам КС $\widehat{\Sigma}_G$ в соответствии с (4.19), причём указанная реализация является корректной суперпозицией соответствующих схем в силу отмеченных выше свойств ортогональности ФАЛ из G, подставляемых вместо БП из y.

Пусть ИКС $\widehat{\Sigma}'$ от БП x' содержит в качестве подсхемы КС $\widehat{\Sigma}_G$ и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих 2^{n-q} выходов согласно (4.19), используя для этого схему $\widehat{\mathcal{F}}_t$, входы которой присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}_G$ соответствующим образом.

Искомая ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ содержит ИКС $\widehat{\Sigma}'$ в качестве подсхемы и представляет собой результат корректной суперпозиции вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$–КС, моделирующая в базисе Б контактное дерево от БП x'', входы (листья) которого присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}'$ в соответствии с (4.10).

Сложности ИКС Σ' и КС Σ'' удовлетворяют неравенствам

$$L\big(\Sigma'\big) \leqslant L\big(\Sigma_G\big) + 2^{n-q} \cdot t, \qquad L\big(\Sigma''\big) \leqslant 2^{n-q+1}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}\big(\Sigma_f\big) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot 2^{n-q} \cdot t + O\big(2^{n-q}\big) + O\big(2^s + t \cdot 2^{q+s/2}\big).$$

Оценка (4.14) получается из последнего неравенства при тех же значениях параметров, что и в теореме 4.1, при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения.

Теорема доказана. □

Следствие. *Из* (4.14) *с учётом нижней оценки §3 вытекает соотношение*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \sim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Литература

[1] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.

[2] *Андреев А. Е.* О сложности реализации частичных булевых функций схемами из функциональных элементов. Дискретная математика, т. 1 (1989), №4. С. 36-45.

[3] *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004

[4] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.

[5] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.

[6] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: МГУ, 1984.

[7] *Нигматулин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[8] *Яблонский С. В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. Проблемы кибернетики, вып. 2. - М.:Физматгиз, 1959. С. 75-121 (См. также Избранные труды С.В. Яблонского. М.: МАКС Пресс, 2004.).

[9] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[10] *Кричевский Р. Е.* О сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих одну последовательность булевых функций. Проблемы кибернетики, вып. 12. М.: Наука, 1964. С. 45-55.

[11] *Ложкин С. А.* Об одном методе получения нижних оценок сложности контактных схем и о некоторых минимальных схемах для линейных функций. Сб. трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. С. 113-115.

[12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов. Математические вопросы кибернетики, вып. 6 М.: Наука, 1996. С. 189 - 214.

[13] *Ложкин С. А.* О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе. Вестник МГУ. Математика. Механика, 1996, №2. С. 80-82.

[14] *Ложкин С. А., Кошкин М.* А. О сложности реализации некоторых систем функций алгебры логики контактными многополюсниками. ДАН СССР, т. 298 (1988), №4. С. 807-811.

[15] *Шоломов Л. А.* О реализации недоопределенных булевых функций схемами их функциональных элементов. Проблемы кибернетики, вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 215 - 226.

[16] *Shannon C. E.* The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell System Technical Journal. — Vol. 28, No. 1. — 1949. — P. 59–98. (Русский перевод: *Шеннон К.* Синтез двухполюсных переключательных схем // Работы по теории информации и кибернетике. — М: ИЛ, 1963. — С. 59–105.)