Курс «Основы кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений»

9. Планы семинарских занятий на осенний семестр 2017-2018 уч. года и ориентировочный график их проведения

Семинар 1 (4.IX–8.IX)

Комбинаторика граней единичного булева куба. Представление ФАЛ с помощью ДНФ и его «геометрическая» интерпретация, совершенная ДНФ. Сокращённая ДНФ и «геометрические» методы её построения, карта Карно. Теоретический материал [1: с. 19–32], [5: с. 290–292, 296–298].

В классе. Из [5]: гл. IX — 1.2 (1-6); гл. I — 2.3 (3). Найти число тех ФАЛ от n, $n \geqslant 2$, БП, совершенная ДНФ которых является их единственной ДНФ и имеет длину 2 `(К1)`; доказать, что длина совершенной ДНФ от БП $x_1, \dots, x_n$, являющейся единственной ДНФ реализуемой ею ФАЛ, не больше, чем 2^{n-1} `(К2)`. Из [5]: гл. IX — 2.1 (1,2), 2.5 (1,5), 2.6 (1,5).

На дом. Из [5]: гл. IX — 1.2 (7,9); гл. I — 2.3 (4). Найти число тех ФАЛ от БП $x_1, \dots, x_n$, $n \geqslant 2$, совершенная ДНФ которых является их единственной ДНФ длины 2^{n-1} `(Д1)` и длины 3 `(Д2)`. Из [5]: гл. IX — 2.1 (3), 2.5 (2,6), 2.6 (2,6).

Семинар 2 (11.IX–15.IX)

Алгебраические методы построения сокращённой ДНФ. Тупиковые ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. Теоретический материал [1: с. 32–36, 38–41], [5: с. 296–298, 301–303].

В классе. Из [5]: гл. IX — 2.3 (1,2), 2.2 (1,2), 2.9 (3), 2.14 (1,2), 3.3 (1,2) — построить ядро и ДНФ $\bigcap T$, 2.12 (3).

На дом. Из [5]: гл. IX — 2.3 (3,4), 2.2 (3,4), 2.9 (5), 3.3 (3,4) — построить ядро и ДНФ $\bigcap T$, 2.12 (6), 2.13.

Семинар 3 (18.IX–23.IX)

ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых. Таблица Квайна, методы построения всех тупиковых (минимальных, кратчайших) ДНФ. Теоретический материал [1: с. 41–44, 51–55], [5: с. 301–303].

В классе. Из [5]: гл. IX — 3.1 (1,5), 3.3 (1,2) — построить ДНФ Квайна и ДНФ $\sum T$, 3.4 (3), 3.6 (1,4,7).

На дом. Из [5]: гл. IX — 3.1 (4,6), 3.3 (3,4) — построить ДНФ Квайна и ДНФ $\sum T$, 3.4 (4), 3.6 (3,6,8).

Семинар 4 (25.IX–29.IX)

Особенности ДНФ для некоторых типов ФАЛ, оценки числа тупиковых (минимальных) ДНФ. Разбор задач к контрольной №1. Теоретический материал [1: с. 44–50, 59–65], [5: с. 301–303].

В классе. Построить совершенную и сокращённую ДНФ ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3)$, если известно, что она линейно зависит от БП x_1 и $N_f \supseteq \{(000), (101)\}$, $\overline{N}_f \supseteq \{(110), (011)\}$ `(К1)`. Из [5]: гл. IX — 2.9 (2). Построить сокращённую ДНФ монотонной ФАЛ из $P_2(4)$, нижними единицами которой являются наборы (0101), (1011), (1100), (0110) `(К2)`. Из [5]: гл. IX — 2.12 (2), 3.7 (2).

На дом. Построить совершенную и сокращённую ДНФ ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, если известно, что она линейно зависит от БП x_1, x_2 и $N_f \supseteq \{(0100), (1001)\}$, $\overline{N}_f \supseteq \{(1010), (1111)\}$ `(Д1)`. Построить сокращённую ДНФ монотонной ФАЛ из $P_2(4)$, нижними единицами которой являются наборы (1010), (0100), (0011), (1001) `(Д2)`. Из [5]: гл. IX — 2.9 (8), 2.12 (8), 3.7 (4).

Семинар 5 (2.X–6.X)

Эквивалентные преобразования формул. Теоретический материал [1: с. 86–90, 146–161], [4: с. 19].
В классе. Из [4]: 3.1 (1), 3.3 (1,4), 3.8 (1–3), 3.9 (1).
На дом. Из [4]: 3.1 (2), 3.3 (3,6), 3.8 (5–9), 3.9 (2).

Семинар 6 (9.X–13.X)

Задание формул деревьями, оптимизация подобных формул по глубине. Контактные схемы и π-схемы, моделирование формул и π-схем. Теоретический материал [1: гл. 2, §§2, 5].
В классе.

1. Построить по заданной формуле $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \big((x_1 \vee x_2) \vee \overline{x}_3\big)\overline{\big(x_1(x_3 \vee x_4)\big)} \vee \big(x_1(\overline{x}_3 x_4) \vee (\overline{x}_1 \vee \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee x_2)\big)$, соответствующее ей дерево, а затем перейти от него к дереву (формуле) минимальной сложности с использованием многовходовых ФЭ &, $\vee$, которая соответствует классу всех формул базиса $Б_0$, подобных исходной; найти число всех таких формул.

2. Построить в $Б_0$ формулу минимальной глубины, подобную формуле $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee \vee \overline{x}_2\overline{x}_4\overline{x}_5 \vee x_4 x_5 x_6$, (минимальность обосновать).

3. С помощью различных приёмов (просмотр всех наборов, нахождение всех простых проводящих цепей, а также всех тупиковых неединичных сечений) построить таблицу истинности ФАЛ, реализуемых КС, показанными на рис. 10 и 12 из [4].

4. Построить π-схемы, моделирующие: а) конкретные ДНФ и КНФ; б) сокращённую ДНФмультиплексорной ФАЛ μ_n (на базе КД); в) совершенную ДНФ ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3)$, столбец значений которой имеет вид $\tilde{\alpha}_f = (0110\,1100)$ (на базе КД).

На дом. В соответствии с приведёнными выше пунктами 1–4:

1. $\mathcal{F} = (x_1 x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \vee \overline{x}_1(x_2 \vee \overline{x}_3)(x_3 \vee x_4)$.

2. $\mathcal{F} = x_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_4 x_5 \vee \overline{x}_5 x_6$.

3. Рис. 13, 14, 17 из [4].

4. в) $\tilde{\alpha}_f = (1101\,1001\,0111\,1001)$.

Семинар 7 (16.X–20.X)

Эквивалентные преобразования КС. Теоретический материал [1: с. 169–185].
В классе. Из [4]: 4.1 (2,4,6–8), 4.3 (1).
На дом. Из [4]: 4.1 (9–12), 4.3 (3).

Семинар 8 (23.X–27.X)

Эквивалентные преобразования КС (окончание). Схемы из функциональных элементов (СФЭ), их эквивалентные преобразования (ЭП) с помощью основных тождеств путём моделирования ЭП соответствующих формул. Теоретический материал [1: с. 169–185, 146–156].

В классе.

1. Для заданных эквивалентных КС Σ', Σ'' от БП $X(n)$ и $m \leqslant n$ построить ЭП $\Sigma' \overset{\tau_m}{\models\!\Rightarrow} \Sigma''$, а затем доказать, что $\Sigma' \overset{\tau_k}{\not\models\!\Rightarrow} \Sigma''$ при $k < m$:

   а) $m = n = 3$, а Σ' и Σ'' — КС из задачи 4.1 (9) домашнего задания семианара 7;

   б) $m = n = 3$, а Σ' и Σ'' — π-схемы, моделирующие левую и правую части тождества $t^{\text{Д}}_{\vee,\&}$;

   в) $m = 2$, $n = 3$, Σ' — первая (левая) КС из задачи 4.1 (10) домашнего задания семинара 7, а КС Σ'' получается из второй (правой) КС этой задачи перестановкой контактов x, z и проведением цепи из контактов y, z, соединяющей неполюсные вершины;

   г) $m = n = 2$, а Σ' — первая (левая) КС из задачи 4.1 (11) домашнего задания семинара 7, а КС Σ'' получается из второй (правой) КС этой задачи проведением цепи из контактов x, y, соединяющей полюса 1 и 2.

2. Для формулы $\mathcal{F}$ построить соответствующее ей квазидерево, а затем перейти от него к более «компактной» СФЭ, применяя операцию «отождествления» максимальных по включению изоморфных квазиподдеревьев до тех пор, пока это возможно:

$$\mathcal{F} = \left(\overline{(x_1x_2)} \vee x_3\right)\left(x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_4\right) \vee \left(x_1x_2 \vee \overline{(x_1x_4)}\right).$$

3. Вывести формульное тождество t из системы тождеств τ, а затем промоделировать этот вывод в классе СФЭ:

$$t = t^{\text{П}}, \quad \tau = \{t^{\text{ПК}}_{1\&}, t^{\text{Д}}_{\&\vee}, t^{\text{ОП}}_{\vee}, \tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}\}.$$

На дом. В соответствии с приведёнными выше пунктами 1–3:

1. а) $m = n = 3$, а Σ' и Σ'' — π-схемы, моделирующие две части формульного тождества

$$(x_1 \vee \overline{x}_1x_2)(x_2 \vee x_3) = x_2 \vee x_1x_3\,;$$

   б) $m = n = 3$, а Σ' и Σ'' — КС от БП $X(3)$ с полюсами 1, 2, 3 такие, что в КС Σ' полюс с номером i, $i = 1, 2, 3$, соединён с её единственной внутренней вершиной контактом x_i, а в КС Σ'', не имеющей внутренних вершин, он соединён с полюсом j, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, цепочкой контактов x_ix_j;

2. $\mathcal{F} = \overline{(x_1(x_2x_3))}(\overline{x}_4 \vee x_1 \vee x_3) \vee x_2x_3(\overline{x}_4 \vee x_1)$;

3. t — тождество обобщённого склеивания, $\tau = \tilde{\tau}_{\text{осн}}$ — расширенная система основных тождеств.

Семинар 9 (30.X–3.XI)

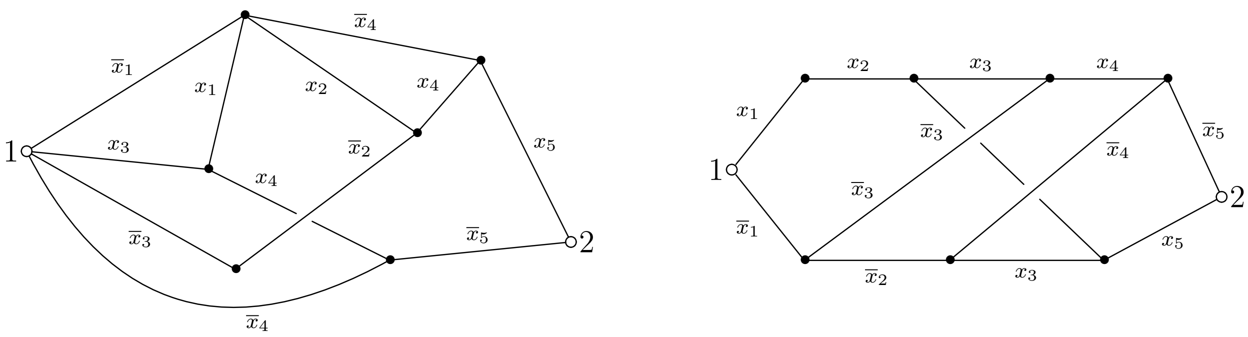
Повторение материала 5, 7 и 8 семинарских занятий. Подготовка к контрольной по второму разделу (контрольная работа №2).

Семинар 10 (7.XI–10.XI)

Сложность ФАЛ и методы синтеза схем на основе ДНФ. Теоретический материал [1: с. 186–210].

В классе. Из [5]: гл. X — 1.1 (2, 3, 4, ФАЛ $\mu_1(x_1, x_2 \vee x_3, x_4 \cdot x_5) = \overline{x}_1(x_2 \vee x_3) \vee x_1(x_4 \cdot x_5)$ — как в классе СФЭ `(K1)`, так и в классе КС `(K2)`, а также ФАЛ $(x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\overline{x}_1 \vee x_2)x_4$ — в классе КС `(K3)`); 2.4 (1); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем.

На дом. Из [5]: гл. X — 1.1 (5–7), 2.4 (2); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем.



(а) В классе. **(б)** На дом.

Рис. 1. Каскадные контактные схемы к семинарам 11 и 12.

Семинар 11 (13.XI–17.XI)

Каскадные КС и инверсные КС, метод каскадов для КС. Метод Шеннона. Теоретический материал [1: с. 186–210].

В классе. Для заданной на рис. 1а каскадной КС построить инверсную к ней КС `(К1)`. Из [5]: гл. X — 2.13 (1, 4, 7), 2.14 (1), 2.14 (2 — с оптимизацией сложности за счёт выбора порядка БП разложения), 2.14 (5). Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС `(К2)` и СФЭ `(К3)` по методу Шеннона.

На дом. Для заданной на рис. 1б каскадной КС построить инверсную к ней КС `(Д1)`. Из [5]: гл. X — 2.13 (2, 5, 6), 2.14 (3 — с оптимизацией сложности за счёт выбора порядка БП разложения), 2.14 (6). Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС `(Д2)` и СФЭ `(Д3)` по методу Шеннона.

Семинар 12 (20.XI–24.XI)

Моделирование каскадных КС в классе СФЭ. Метод каскадов и метод Шеннона для СФЭ. Теоретический материал [1: с. 186–210].

В классе. Показанную на рис. 1а каскадную КС промоделировать в классе СФЭ `(К1)`. С помощью метода каскадов построить СФЭ для ФАЛ и систем ФАЛ из [5]: гл. X — 2.13 (1, 4, 7), 2.14 (1), 2.14 (2), 2.14 (5). Используя метод Шеннона доказать, что $L^{\mathrm{C}}(4) \leqslant 18$ `(К2)`.

На дом. Показанную на рис. 1б каскадную КС промоделировать в классе СФЭ `(Д1)`. С помощью метода каскадов построить СФЭ для ФАЛ и систем ФАЛ из [5]: гл. X — 2.13 (2, 5, 6), 2.14 (3), 2.14 (6). Используя метод Шеннона доказать, что $L^{\mathrm{C}}(5) \leqslant 34$ `(Д2)`.

Семинар 13 (27.XI–1.XII)

Асимптотически наилучшие методы синтеза, синтез схем для ФАЛ из специальных классов. Теоретический материал [1, с. 215-240].

В классе. Выписать таблицу значений ФАЛ стандартного ДУМ порядка 3 и высоты 3 `(К1)`. Построить 2-регулярное разбиение куба B^4, на каждой компоненте которого каждая из ФАЛ $x_1 \to x_2$, $x_1 \oplus x_2$ моделируется либо БП, либо её отрицанием `(К2)`. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ равных 1 при $x_1 = 1$ (КС) `(К3)`; класса всех самодвойственных ФАЛ (СФЭ) `(К4)`; класса всех ФАЛ симметричных по первым трем БП (КС) `(К5)`; класса ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n, $n = 3, 4, \ldots$, БП, обладающих тем свойством, что множество ФАЛ вида $f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $(\sigma_1, \sigma_2) \in B^2$, состоит из 4 различных попарно ортогональных ФАЛ, дизъюнкция которых равна 1 (СФЭ) `(К6)`.

На дом. Выписать таблицу значений ФАЛ ДУМ порядка 3, связанного с разбиением куба B^3 на 3 подмножества: B^3_1, B^3_2, $B^3_0 \cup B^3_3$ `(Д1)`. Построить 2-регулярное разбиение куба B^7, на каждой компоненте которого любая отличная от константы ФАЛ от БП x_1, x_2 моделируется либо БП, либо её отрицанием `(Д2)`. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ, равных 0 при $x_1 = x_2 = 0$ (КС) `(Д3)`; класса, состоящего из всех тех ФАЛ, у которых любая подфункция от первых трёх БП линейна `(Д4)`; класса ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n,

$n = 3, 4, \ldots$, БП, обладающих тем свойством, что множество ФАЛ вида $f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $(\sigma_1, \sigma_2) \in B^2$, состоит из 4 различных попарно ортогональных ФАЛ (СФЭ) (Д5).