Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математические модели последовательных вычислений

Блок 21

Алгебра процессов с параллелизмом (PAP)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Способ задания процессов в BPA позволяет без особых усилий расширять возможности процессов, добавляя

- новые операции в синтаксис и
- новые правила переходов, задающие семантику этих операций

В остальном (если не оговорено иное) все определения напрямую без изменений переносятся с BPA на расширенный вариант алгебры процессов

Две наиболее важных черты, ради которых придумывалась алгебра процессов и которые никак не отражены в BPA — это

- параллельное выполнение нескольких процессов и
- взаимодействие процессов

Алгебра процессов с параллелизмом (Process Algebra with Parallelism, PAP) — это BPA, расширенная операциями, описывающими параллельное выполнение и совместное (одновременное параллельное) выполнение действий

По сравнению с BPA добавим в БНФ процесса такой пункт:

$$p ::= \ \dots \ \dots \mid (p \| p)$$

$\|$ — это операция параллельной композиции, предназначенной одновременно для описания как параллельного выполнения, так и взаимодействия процессов (вернее, подпроцессов одного процесса)

Приоритет этой операции выше ., и ассоциативность такая же (вправо)

Параллельное выполнение процессов задаётся следующими правилами $R_{\|}$ (в них $a \in \mathcal{A}$ и $p, q, \widetilde{p}, \widetilde{q}$ — незавершённые процессы)

$$\frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p\|q \xrightarrow{a} \widetilde{p}\|q} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} \widetilde{q}}{p\|q \xrightarrow{a} p\|\widetilde{q}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p\|q \xrightarrow{a} q} \qquad \frac{q \xrightarrow{a} \checkmark}{p\|q \xrightarrow{a} p}$$

Для описания взаимодействия процессов зададим функцию взаимодействия $\gamma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Содержательно, $\gamma(a, b)$ — это действие, которым описывается одновременное взаимосвязанное выполнение действий a и b

На функцию взаимодействия накладываются *естественные* ограничения:

1. Коммутативность: $\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$
2. Ассоциативность: $\gamma(\gamma(a, b), c) = \gamma(a, \gamma(b, c))$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$

Эти два свойства означают, что множество действий с операцией γ — коммутативная полугруппа, то есть совокупный эффект взаимосвязанного выполнения совокупности действий зависит только от количества действий в этой совокупности

Взаимодействие процессов задаётся следующими правилами R_γ (в них $a \in \mathcal{A}$ и $p, q, \widetilde{p}, \widetilde{q}$ — незавершённые процессы):

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark, \ q \xrightarrow{b} \checkmark}{x \| y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark, \ q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{x \| y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{q}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}, \ q \xrightarrow{b} \checkmark}{x \| y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}, \ q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{x \| y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p} \| \widetilde{q}}$$

Пример

В примерах будем считать, что для действий a и $\overline{a}$ верно $\gamma(a, \overline{a}) = \boxed{\text{a}}$

$user = (\text{мон}.(\text{чай} + \text{кофе}).\text{взять})$

Кофейный автомат зададим процессом

$machine = (\overline{\text{мон}}.(\overline{\text{чай}}.\text{дать\_чай} + \overline{\text{кофе}}.\text{дать\_кофе}))$

Взаимодействие автомата и пользователя *попробуем* задать процессом

$p = (user \| machine)$

Положим, что $\gamma(\text{дать\_чай}, \text{взять}) = \text{перед\_чай}$

Тогда у p есть такое вычисление:

$user \| machine \xrightarrow{\boxed{\text{мон}}}$

$((\text{чай} + \text{кофе}).\text{взять}) \| (\text{наж\_чай}.\text{дать\_чай} + \text{наж\_кофе}.\text{дать\_кофе})$

$\xrightarrow{\boxed{\text{чай}}} \text{взять} \| \text{дать\_чай} \xrightarrow{\text{перед\_чай}} \checkmark$

Но у p есть и такое вычисление:

$user \| machine \xrightarrow{\text{мон}} ((\text{чай} + \text{кофе}).\text{взять}) \| machine \xrightarrow{\text{чай}} \text{взять} \| machine$

$\xrightarrow{\text{взять}} machine \xrightarrow{\text{вз\_мон}} \ldots \checkmark$

Чтобы «повысить детальность» параллельной композиции и разделить параллельное выполнение процессов со взаимодействием и без него, добавим ещё два пункта в БНФ процесса:

$$p \ ::= \ \ldots \ \ \ldots \ \mid \ (p \mathbin{\lfloor\!\lfloor} p) \ \mid \ (p|p)$$

$\lfloor\!\lfloor$ — операция левой композиции

Содержательно, левая композиция отличается от параллельной тем, что первый шаг — это выполнение левого подпроцесса без взаимодействия

$|$ — операция взаимодействия

$$\mathrm{PAP} = \mathrm{BPA} + \| + \lfloor\!\lfloor + |$$

Приоритеты и ассоциативность операций $\lfloor\!\lfloor$ и $|$ такие же, как и у $\|$

Правила $R_{\lfloor\!\lfloor}$, задающие семантику операции левой композиции (в них $a \in \mathcal{A}$ и $p, q, \widetilde{p}$ — незавершённые процессы):

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark}{p \lfloor\!\lfloor q \xrightarrow{a} q} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}}{p \lfloor\!\lfloor q \xrightarrow{a} \widetilde{p} \| q}$$

Правила $R_{|}$, задающие семантику операции взаимодействия (в них $a \in \mathcal{A}$ и $p, q, \widetilde{p}, \widetilde{q}$ — незавершённые процессы):

$$\frac{p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} \checkmark}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{q}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}, q \xrightarrow{b} \checkmark}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p}} \qquad \frac{p \xrightarrow{a} \widetilde{p}, q \xrightarrow{b} \widetilde{q}}{x|y \xrightarrow{\gamma(a,b)} \widetilde{p} \| \widetilde{q}}$$

Но, увы, этих операций недостаточно для описания взаимодействия пользователя и кофейного автомата без «лишних» вычислений