Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 4

Проблемы ограниченности и безопасности сетей Петри
Деревья покрытия разметок

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

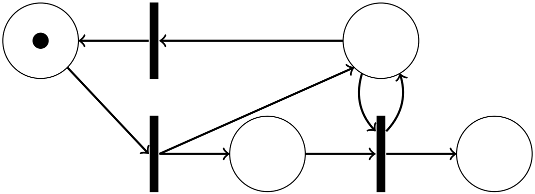
ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

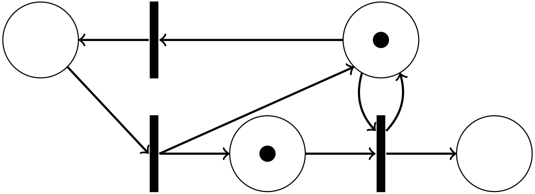
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

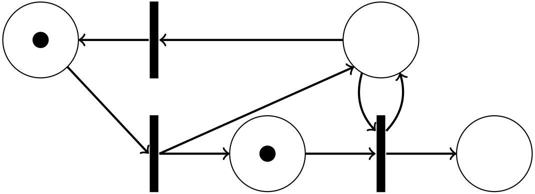
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

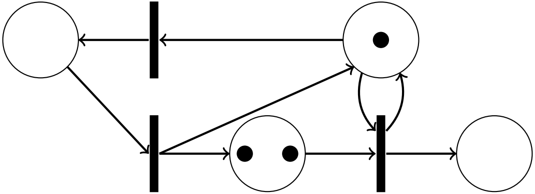
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

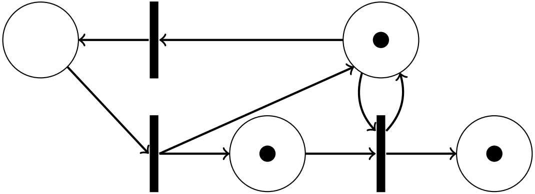
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

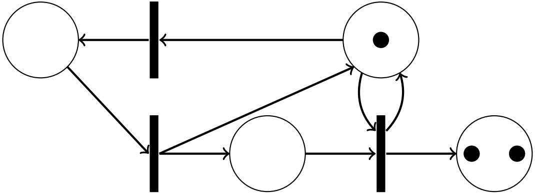
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

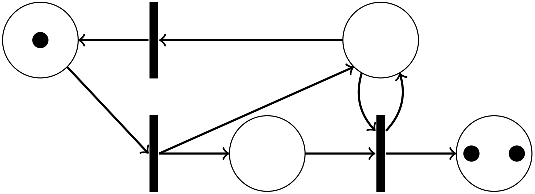
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

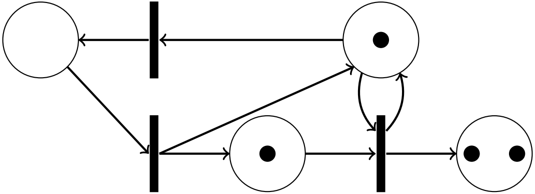
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

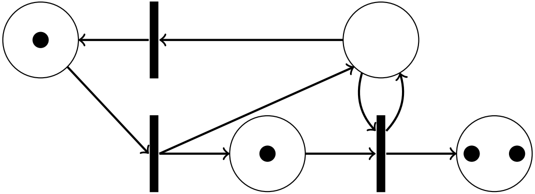
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

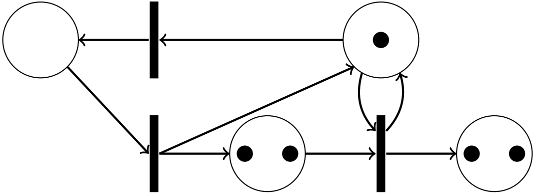
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

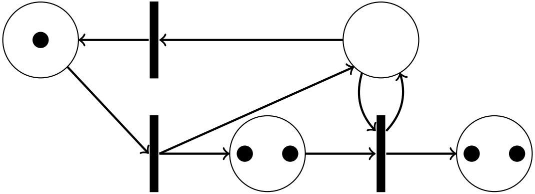
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

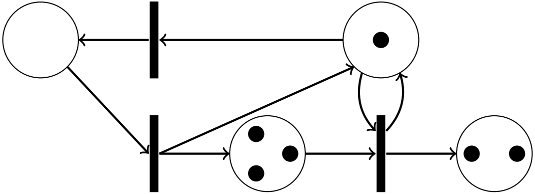
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

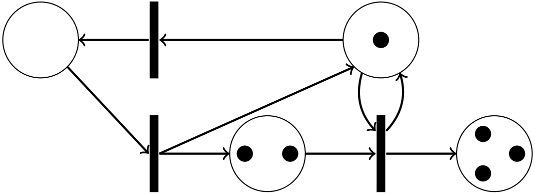
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

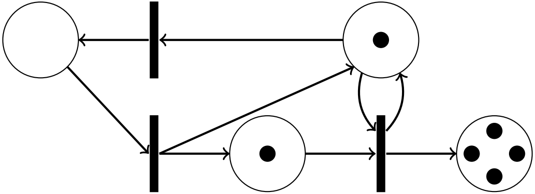
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

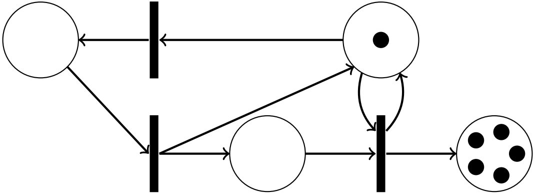
В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Позиция маркированной сети Петри ограниченна, если количество фишек, лежащих в этой позиции в достижимых разметках, ограничено сверху

Сеть Петри ограниченна, если все её позиции ограниченны

Например, следующая сеть Петри неограниченна:



Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она ограниченной

В блоке 3 было показано, что ограниченность сети Петри равносильна конечности множества достижимых разметок этой сети — но одного недостаточно для решения задачи

Проблема ограниченности сетей Петри

Лемма (о неубывающей цепи разметок). **В любой бесконечной последовательности разметок $M_1, M_2, M_3, \dots$ любой сети Петри существует бесконечная монотонно неубывающая подпоследовательность: $M_{i_1} \preceq M_{i_2} \preceq M_{i_3} \preceq \dots$, где $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$**

Доказательство.

Произвольно упорядочим позиции рассматриваемой сети: $\{p_1, \dots, p_n\}$
Выделим из последовательности $\alpha = (M_1, M_2, M_3, \dots)$ подпоследовательность $K_1^1, K_2^2, K_3^1, \dots$, такую что $K_1^1(p_1) \le K_2^1(p_1) \le K_3^1(p_1) \le \dots$, следующим образом:

- K_1^1 — любая разметка M из α с наименьшим значением $M(p_1)$
- K_{j+1}^1 — разметка M, следующая в α за K_j^1 и имеющая наименьшее значение $M(p_1)$ среди всех таких разметок

Аналогично последовательно для $\ell \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ можно из последовательности $K_1^\ell, K_2^\ell, K_3^\ell, \dots$ выделить подпоследовательность $K_1^{\ell+1}, K_2^{\ell+1}, K_3^{\ell+1}, \dots$, такую что $K_1^1(p_{\ell+1}) \le K_2^1(p_{\ell+1}) \le K_3^1(p_{\ell+1}) \le \dots$
По построению, $K_1^n, K_2^n, K_3^n, \dots$ — это искомая подпоследовательность $M_{i_1} \preceq M_{i_2} \preceq M_{i_3} \preceq \dots$ ▼

Проблема ограниченности сетей Петри

Будем говорить, что разметка K строго покрывает разметку M ($M \prec K$), если верно $M \preceq K$ и $M \neq K$

Теорема (критерий неограниченности сети Петри)

Сеть Петри $\pi = (P, T, E, W, M_0)$ неограниченна $\Leftrightarrow$ существуют разметки M_1 и M_2, такие что $M_0 \xrightarrow{\pi}{}^{*} M_1 \xrightarrow{\pi}{}^{*} M_2$ и $M_1 \prec M_2$

Доказательство. ($\Leftarrow$)

Из $M_1 \prec M_2$ следует, что существует разметка K, такая что:

- $M_2 = M_1 + K$ и
- разметка K непуста: существует позиция p, такая что $K(p) > 0$

Для разметки M и числа $n \in \mathbb{N}_0$ записью nM обозначим разметку, определяемую равенством $(nM)(p) = n \cdot M(p)$

Из монотонности сетей Петри следует, что в π из разметки вида $M + nK$, где $n \in \mathbb{N}_0$, достижима разметка $M + (n+1)K$

Следовательно, в π достижимы все разметки вида $M + nK$

При этом $(M + nK)(p) = M(p) + n \cdot K(p) > n$, а значит, позиция p неограниченна

Проблема ограниченности сетей Петри

Доказательство. $(\Rightarrow)$

$(\pi = (P, T, E, W, M_0)$ неограниченна $\Rightarrow M_0 \xrightarrow{\pi}{}^* M_1 \xrightarrow{\pi}{}^* M_2$: $M_1 \prec M_2)$

Если сеть π неограниченна, то в её графе достижимых разметок Γ содержится бесконечно много вершин

При этом количество дуг, исходящих из каждой вершины Γ, не превосходит числа переходов сети π

По лемме Кёнига, в Γ существует бесконечный путь
$M_0 \xrightarrow{t_1} M^1 \xrightarrow{t_2} M^2 \xrightarrow{t_3} \dots$

По лемме о неубывающей цепи разметок, из этого пути можно выделить подпоследовательность разметок следующего вида:

$$M_0 \xrightarrow{\pi}{}^* K_1 \xrightarrow{\pi}{}^* K_2 \xrightarrow{\pi}{}^* K_3 \xrightarrow{\pi}{}^* \dots,$$
$$K_1 \preceq K_2 \preceq K_3 \preceq \dots$$

Это означает, в частности, что $M_0 \xrightarrow{\pi}{}^* K_1 \xrightarrow{\pi}{}^* K_2$ и $K_1 \preceq K_2$

Остаток доказательства для размышлений: а как в этих рассуждениях можно получить $\prec$ вместо $\preceq$? ▼

Дерево покрытия разметок сети Петри

Критерий неограниченности сети Петри лежит в основе «классического» решения проблемы ограниченности сети Петри

Это решение заключается в построении дерева покрытия — конечной «свёртки» графа достижимости, содержащей информацию о некоторых достижимых разметках сети и о неограниченности некоторых позиций относительно некоторых разметок

По сравнению с графом достижимости, в дереве покрытия вместо *обычных* разметок используются предельные разметки

Предельная разметка отличается от *обычной* разметки тем, что наряду со значениями $M(p) \in \mathbb{N}_0$ допускается также значение $M(p) = \infty$

Значение $M(p) = \infty$ обозначает возможность неограниченного накопления фишек в позиции p

Для разметок M_1, M_2, таких что $M_1 \prec M_2$, записью $[M_1, M_2]$ обозначим предельную разметку, устроенную так:

$$[M_1, M_2](p) = \begin{cases} M_2(p), & \text{если } M_1(p) = M_2(p) \\ \infty & \text{иначе} \end{cases}$$

Дерево покрытия разметок сети Петри

Дерево покрытия Γ маркированной сети Петри π — это ориентированное корневое размеченное дерево следующего вида

Вершины Γ помечены разметками и предельными разметками сети

Корень помечен начальной разметкой сети

Все внутренние вершины помечены разметками

Вершина v, помеченная разметкой M, является листом $\Leftrightarrow$

- разметка M тупиковая или
- на пути из корня в v есть вершина, помимо v, помеченная разметкой M

Дерево покрытия разметок сети Петри

Дерево покрытия Γ маркированной сети Петри π — это ориентированное корневое размеченное дерево следующего вида

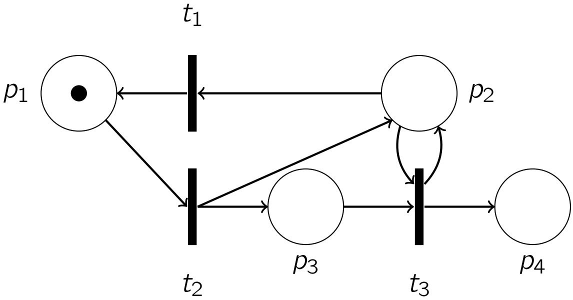
Ду́ги, исходящие из внутренней вершины с пометкой M, помечены переходами сети, активными в M, разные ду́ги — разными переходами

Для дуги́ $v \xrightarrow{t} \widetilde{v}$, такой что v помечена разметкой M и K — результат срабатывания перехода t в M, вершина $\widetilde{v}$ помечена следующей предельной разметкой $\widetilde{M}$:

- Если ни одна вершина на пути из корня в v не помечена разметкой M', такой что $M' \prec K$, то $\widetilde{M} = K$
- Иначе $\widetilde{M} = [M', K]$, где M' — последняя разметка на пути из корня в v, такая что $M' \prec K$

Дерево покрытия разметок сети Петри

Пример

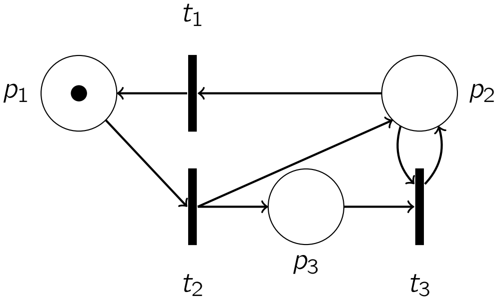


Дерево покрытия этой сети:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{1,0,0,0} \arrow[r, "t_2"] & \boxed{0,1,1,0} \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, "t_1"] & \boxed{0,1,0,1} \arrow[r, "t_1"] & \boxed{1,0,0,\infty} \\
& \boxed{1,0,\infty,0} & &
\end{tikzcd}
$$

Дерево покрытия разметок сети Петри

Другой пример

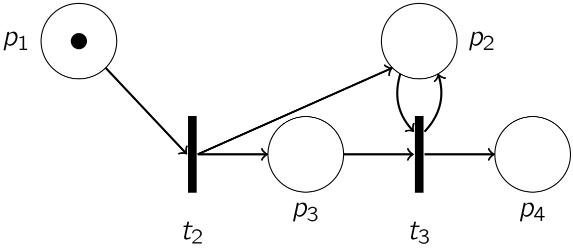


Дерево покрытия этой сети:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\boxed{1,0,0}} \arrow[r, "t_2"] & \boxed{0,1,1} \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, "t_1"] & \boxed{0,1,0} \arrow[r, "t_1"] & \boxed{1,0,0} \\
& \boxed{1,0,\infty} & &
\end{tikzcd}
$$

Дерево покрытия разметок сети Петри

Третий пример



Дерево покрытия этой сети:

$$\boxed{\boxed{1,0,0,0}} \xrightarrow{t_2} \boxed{0,1,1,0} \xrightarrow{t_3} \boxed{0,1,0,1}$$

Дерево покрытия разметок сети Петри

Теорема (о дереве покрытия разметок). Для любой маркированной сети Петри π и его дерева покрыия разметок Γ верно следующее:

1. **Дерево Γ конечно**
2. **Сеть π ограниченна $\Leftrightarrow$ в дереве Γ нет ни одной вершины, помеченной предельной разметкой**

Доказательство.

1. Предположим от противного, что дерево Γ бесконечно

По лемме Кёнига, в Γ существует бесконечный путь, исходящий из корня

По лемме о невозрастающей цепи разметок, в последовательности $M_1, M_2, M_3, \ldots$ разметок, помечающих вершины этого пути, найдутся разметки M_i и M_j, такие что $i < j$ и $M_i \preceq M_j$

Этого быть не может по заданию дерева покрытия

Дерево покрытия разметок сети Петри

Теорема (о дереве покрытия разметок). Для любой маркированной сети Петри π и его дерева покрыия разметок Γ верно следующее:

1. **Дерево Γ конечно**
2. **Сеть π ограниченна $\Leftrightarrow$ в дереве Γ нет ни одной вершины, помеченной предельной разметкой**

Доказательство.

2. $(\Leftarrow)$

Если в Γ есть вершина, помеченная предельной разметкой $\widetilde{M}$, то, по заданию дерева покрытия, существуют достижимые разметки M и K, такие что $M \prec K$ и $\widetilde{M} = [M, K]$

Тогда, по критерию неограниченности сети Петри, сеть π неограниченна

Дерево покрытия разметок сети Петри

Теорема (о дереве покрытия разметок). Для любой маркированной сети Петри π и его дерева покрыия разметок Γ верно следующее:

1. **Дерево Γ конечно**
2. **Сеть π ограниченна $\Leftrightarrow$ в дереве Γ нет ни одной вершины, помеченной предельной разметкой**

Доказательство.
2. ($\Rightarrow$)

Если все листья Γ помечены *обычными* разметками, то, по заданию дерева покрытия, в нём содержатся все достижимые разметки сети

Значит, множество всех достижимых разметок сети π конечно

По доказанному в блоке 2, конечность множества достижимых разметок означает, что сеть π ограниченна ▼

Проблемы ограниченности, безопасности и другие

Следствие. **Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри алгоритмически разрешима**

Трудная задача: какова сложность алгоритма проверки ограниченности сети Петри, состоящего в построении и анализе дерева покрытия?

Напоминание:

- Позиция маркированной сети Петри безопасна, если во всех достижимых конфигурациях в ней лежит не более одной фишки
- Сеть Петри безопасна, если все её позиции безопасны

Проблема безопасности обыкновенных сетей Петри формулируется так: для произвольной заданной маркированной обыкновенной сети Петри проверить, является ли она безопасной

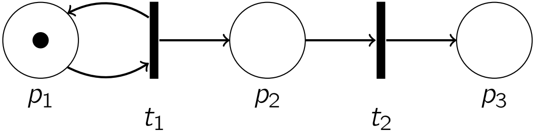
Следствие. **Проблема безопасности обыкновенных сетей Петри алгоритмически разрешима**

Проблемы ограниченности, безопасности и другие

Иногда оказывается важно обнаружить не только неограниченность сети Петри в целом, но и неограниченность конкретных её позиций

В дереве покрытия (*в том его варианте, который изложен сейчас*) может и не оказаться нужной информации

Например:



Дерево покрытия этой сети:

$$\boxed{\boxed{1, 0, 0}} \xrightarrow{t_1} \boxed{1, \infty, 0}$$

По дереву покрытия видно, что позиция p_2 неограниченна

Неограниченной является и позиция p_3, *но по дереву этого не видно*

Построение пути в дереве завершается при первой встрече предельной разметки, поэтому не вышло обнаружить неограниченность p_3

Проблемы ограниченности, безопасности и другие

Построение дерева покрытия можно продолжить, если использовать значение ∞ как *бесконечно большое число*: для любого $n \in \mathbb{N}_0$

- $n < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$
- $\infty = \infty$ и $\infty \not< \infty$
- $\infty + n = \infty - n = n - \infty = \infty$

Тогда можно аналогично имеющимся понятиям определить для перехода t и предельной разметки M

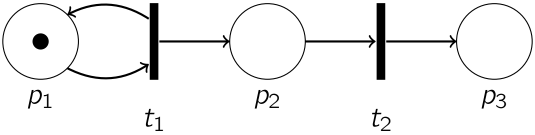
- активность t в M: $E_W(\bullet, t) \preceq M$
- результат срабатывания t в M: $(M - E_W(\bullet, t)) + E_W(t, \bullet)$

Полное дерево покрытия разметок сети Петри π отличается от *неполного* дерева покрытия тем, что предельные разметки считаются *обычными*:

- они могут быть внутренними вершинами
- критерий листа распространяется и на предельные разметки
- дуги, исходящие из внутренней вершины с предельной разметкой, определяются так же, как и для вершины с *обычной* разметкой

Проблемы ограниченности, безопасности и другие

Пример



Полное дерево покрытия этой сети:

$$\boxed{1,0,0} \xrightarrow{t_1} \boxed{1,\infty,0} \xrightarrow{t_2} \boxed{1,\infty,\infty} \xrightarrow{t_2} \boxed{1,\infty,\infty}$$

Теорема (о полном дереве покрытия разметок). Для любой маркированной сети Петри π, его полного дерева покрыия разметок Γ и для любой позиции p сети π верно следующее:

1. **Дерево Γ конечно**
2. **Позиция p сети π ограниченна $\Leftrightarrow$ в дереве Γ нет ни одной вершины, помеченной предельной разметкой M, такой что $M(p) = \infty$**

Доказательство. $\boxed{\text{Попробуйте самостоятельно}}$

Проблемы ограниченности, безопасности и другие

Переход t в сети Петри π называется мёртвым, если он не активен ни в одной достижимой разметке сети

Иными словами, мёртвый переход «фиктивен», ни разу не срабатывает ни в одном вычислении сети

Теорема (о мёртвых переходах). **Переход t маркированной сети Петри π мёртв $\Leftrightarrow$ ни одна дуга в полном дереве покрытия сети π не помечена переходом t**

Доказательство. Попробуйте самостоятельно

Задача (не очень трудная): предложите (с обоснованием) алгоритм проверки того, что в заданной позиции p заданной маркированной сети Петри π хотя бы в одной достижимой разметке лежит хотя бы одна фишка

Задача (тоже не очень трудная): предложите (с обоснованием) алгоритм проверки того, что заданный переход t может сработать неограниченно много раз в одном вычислении заданной маркированной сети Петри π