Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Напоминание

Лекция 10 начиналась с такого примера:

выполняется ли предложение φ
в естественной арифметической интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$?

(*например,* $\varphi : \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$,
или φ — ***произвольное*** *предложение логики предикатов*)

Напоминание

Лекция 10 начиналась с такого примера:

выполняется ли предложение φ
в естественной арифметической интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$?

(*например,* $\varphi : \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$,
или φ — ***произвольное*** *предложение логики предикатов*)

Если удастся построить теорию, адекватно описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$, то можно будет описывать (*и даже иногда решать*) арифметические задачи логическими методами

Напоминание

Лекция 10 начиналась с такого примера:

выполняется ли предложение φ
в естественной арифметической интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$?

(*например,* $\varphi : \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$,
или φ — ***произвольное*** *предложение логики предикатов*)

Если удастся построить теорию, адекватно описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$, то можно будет описывать (*и даже иногда решать*) арифметические задачи логическими методами

Попробуем выбрать небольшой, но при этом достаточно выразительный фрагмент арифметики, и построить для него адекватную теорию $\mathcal{T}_{ar}$

Напоминание

Лекция 10 начиналась с такого примера:

выполняется ли предложение φ
в естественной арифметической интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$?

(*например*, $\varphi : \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$,
или φ — ***произвольное*** *предложение логики предикатов*)

Если удастся построить теорию, адекватно описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$, то можно будет описывать (*и даже иногда решать*) арифметические задачи логическими методами

Попробуем выбрать небольшой, но при этом достаточно выразительный фрагмент арифметики, и построить для него адекватную теорию $\mathcal{T}_{ar}$

Остановимся на таком фрагменте:

арифметика целых неотрицательных чисел
со сложением, умножением и равенством

Формальная арифметика

Сигнатура формальной арифметики:

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Формальная арифметика

Сигнатура формальной арифметики:

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметическая интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$ символов сигнатуры σ_{ar} задаётся так:

- предметная область: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\overline{\mathbf{0}} = 0$, $\quad \overline{\mathbf{S}}(d) = d + 1$
- $\overline{+}$, $\overline{\times}$, $\overline{=}$ — сложение, умножение и равенство чисел

Формальная арифметика

Сигнатура формальной арифметики:

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметическая интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$ символов сигнатуры σ_{ar} задаётся так:

- предметная область: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\overline{\mathbf{0}} = 0, \quad \overline{\mathbf{S}}(d) = d + 1$
- $\overline{+}, \overline{\times}, \overline{=}$ — сложение, умножение и равенство чисел

Формальная арифметика — это любая теория,

более-менее *адекватно* описывающая интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$

Формальная арифметика

Сигнатура формальной арифметики:

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметическая интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$ символов сигнатуры σ_{ar} задаётся так:

- предметная область: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\overline{\mathbf{0}} = 0, \quad \overline{\mathbf{S}}(d) = d + 1$
- $\overline{+}, \overline{\times}, \overline{=}$ — сложение, умножение и равенство чисел

Формальная арифметика — это любая теория,

более-менее *адекватно* описывающая интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$

Перед исследованием того, как такая теория может выглядеть, попробуем оценить, насколько выразителен выбранный фрагмент арифметики

Формальная арифметика

Сигнатура формальной арифметики:

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметическая интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$ символов сигнатуры σ_{ar} задаётся так:

- предметная область: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\overline{\mathbf{0}} = 0, \quad \overline{\mathbf{S}}(d) = d + 1$
- $\overline{+}, \overline{\times}, \overline{=}$ — сложение, умножение и равенство чисел

Формальная арифметика — это любая теория,

более-менее адекватно описывающая интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$

Перед исследованием того, как такая теория может выглядеть, попробуем оценить, насколько выразителен выбранный фрагмент арифметики

Проверка соотношения $\mathcal{I}_{ar} \models \varphi$ — это обоснование/опровержение арифметического утверждения, записанного в виде формулы φ

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Содержательные примеры:

- $\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\right\}, \left\{=^{(2)}\right\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Содержательные примеры:

- $\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$
- $\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\ \text{раз}}(\mathbf{0})\ldots)) \qquad (\mathbf{n} \in \mathbb{N})$

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Содержательные примеры:

- $\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$
- $\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots)) \qquad (\mathbf{n} \in \mathbb{N})$
- $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} \times \mathrm{x}$

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Содержательные примеры:

- $\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$
- $\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$ $\qquad (\mathbf{n} \in \mathbb{N})$
- $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} \times \mathrm{x}$
- $\mathrm{x} \geq \mathrm{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathrm{z}\,(\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z})$

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Содержательные примеры:

- $\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$
- $\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots)) \qquad (\mathbf{n} \in \mathbb{N})$
- $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} \times \mathrm{x}$
- $\mathrm{x} \geq \mathrm{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathrm{z}\, (\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z})$

Рассмотрим сигнатуру σ и содержащийся в ней символ s:
константу, функциональный символ или предикатный символ

$\sigma_{-\mathrm{s}}$ — это сигнатура, получаемая из σ удалением символа s
$\sigma'_{+\mathrm{s}} = \sigma$, если $\sigma' = \sigma_{-\mathrm{s}}$

Определимость

Определение константы[1] $\mathbf{c}$ (*в сигнатуре* $\sigma_{-\mathbf{c}}$) —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ (*сигнатуры* $\sigma_{-\mathbf{c}}$)

Примеры определений в сигнатуре σ_{ar} для

- константы $\mathbf{1}$:

$$\mathrm{x}_{\mathbf{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

[1] Более точное название такого определения — явное определение:

"А — это Б (*не зависящее от А*)"

Определимость

Определение константы[1] $\mathbf{c}$ (*в сигнатуре* $\sigma_{-\mathbf{c}}$) —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ (*сигнатуры* $\sigma_{-\mathbf{c}}$)

Определение функционального символа[1] $\mathbf{f}^{(n)}$ —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Примеры определений в сигнатуре σ_{ar} для

- константы $\mathbf{1}$:

$$\mathrm{x}_{\mathbf{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

- функционального символа $\cdot^{2(1)}$:

$$\mathrm{x}_{\cdot 2} = \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_1$$

[1] Более точное название такого определения — явное определение:

"А — это Б (*не зависящее от А*)"

Определимость

Определение константы[1] $\mathbf{c}$ (*в сигнатуре* $\sigma_{-\mathbf{c}}$) —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ (*сигнатуры* $\sigma_{-\mathbf{c}}$)

Определение функционального символа[1] $\mathbf{f}^{(n)}$ —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Определение предикатного символа[1] $\mathrm{P}^{(n)}$ —

это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Примеры определений в сигнатуре σ_{ar} для

- константы $\mathbf{1}$:

$$\mathrm{x}_{\mathbf{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

- функционального символа $\cdot^{\mathbf{2}(1)}$:

$$\mathrm{x}_{\cdot\mathbf{2}} = \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_1$$

- предикатного символа $\geq^{(2)}$:

$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{y})$$

---

[1] Более точное название такого определения — явное определение:

"А — это Б (*не зависящее от А*)"

Определимость

Если $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ — определение $\mathbf{c}$, то аксиома $\varphi\{\mathrm{x}_{\mathbf{c}}/\mathbf{c}\}$
определяет константу $\mathbf{c}$

Примеры аксиом, определяющих (*в сигнатуре* σ_{ar})

- константу $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

Определимость

Если $\varphi(\mathrm{x_c})$ — определение $\mathbf{c}$, то аксиома $\varphi\{\mathrm{x_c}/\mathbf{c}\}$

определяет константу $\mathbf{c}$

Если $\varphi(\mathrm{x_f}, \widetilde{\mathrm{x}^n})$ — определение $\mathbf{f}$, то аксиома $\forall\widetilde{\mathrm{x}^n}\ (\varphi\{\mathrm{x_f}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}^n})\})$

определяет функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$

Примеры аксиом, определяющих (*в сигнатуре* σ_{ar})

- константу $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

- функциональный символ $\cdot^{\mathbf{2}}$:

$$\forall \mathrm{x}_1\ (\mathrm{x}_1{}^2 = \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_1)$$

Определимость

Если $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ — определение $\mathbf{c}$, то аксиома $\varphi\,\{\mathrm{x}_{\mathbf{c}}/\mathbf{c}\}$

определяет константу $\mathbf{c}$

Если $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение $\mathbf{f}$, то аксиома $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\varphi\,\{\mathrm{x}_{\mathbf{f}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\})$

определяет функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$

Если $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение P, то аксиома $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\mathrm{P}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \leftrightarrow \varphi)$

определяет предикатный символ $\mathrm{P}^{(n)}$

Примеры аксиом, определяющих (*в сигнатуре* σ_{ar})

- константу $\mathbf{1}$:
$$\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$
- функциональный символ $\cdot^{2}$:
$$\forall \mathrm{x}_1\ (\mathrm{x}_1{}^2 = \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_1)$$
- предикатный символ $\geq$:
$$\forall \mathrm{x}_1\ \forall \mathrm{x}_2\ (\mathrm{x}_1 \geq \mathrm{x}_2 \leftrightarrow \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{y}))$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Сведём проблему $(\mathcal{T} \cup \{\varphi\})$-общезначимости формул сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ к проблеме $\mathcal{T}$-общезначимости формул сигнатуры σ

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Сведём проблему $(\mathcal{T} \cup \{\varphi\})$-общезначимости формул сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ к проблеме $\mathcal{T}$-общезначимости формул сигнатуры σ

Покажем, как можно преобразовать формулу ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ в формулу ψ' сигнатуры σ, такую что

$$\models_{\mathcal{T}\cup\{\varphi\}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}} \psi'$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Сведём проблему $(\mathcal{T} \cup \{\varphi\})$-общезначимости формул сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ к проблеме $\mathcal{T}$-общезначимости формул сигнатуры σ

Покажем, как можно преобразовать формулу ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ в формулу ψ' сигнатуры σ, такую что

$$\models_{\mathcal{T}\cup\{\varphi\}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}} \psi'$$

Для этого, в числе прочего, потребуется формула D,

- равносильная определению, используемому в аксиоме φ, и
- не содержащая связанных переменных, встречающихся в ψ

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение предикатного символа $\mathrm{s} = \mathrm{P}^{(n)}$

Каждый атом $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ заменяется на формулу

$$D\left\{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_n/t_n\right\}$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение предикатного символа $\mathrm{s} = \mathrm{P}^{(n)}$

Каждый атом $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ заменяется на формулу

$$D\,\{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_n/t_n\}$$

Например: $(D : \exists \mathrm{u}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{u}))$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^2 \geq \mathrm{y})$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение предикатного символа $\mathrm{s} = \mathrm{P}^{(n)}$

Каждый атом $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ заменяется на формулу

$$D\,\{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_n/t_n\}$$

Например: $(D : \exists \mathrm{u}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{u}))$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^2 \geq \mathrm{y})$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^2 = \mathrm{y} + \mathrm{u})$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение константы $\mathrm{s} = \mathbf{c}$

Все вхождения константы **c** в формулу ψ заменяются на "свежую" переменную y, и полученная формула χ заменяется на

$$\forall \mathrm{y} \left(D \{ \mathrm{x}_{\mathbf{c}} / \mathrm{y} \} \to \chi \right)$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение константы $\mathrm{s} = \mathbf{c}$

Все вхождения константы $\mathbf{c}$ в формулу ψ заменяются на "свежую" переменную y, и полученная формула χ заменяется на

$$\forall \mathrm{y}\ (D\,\{\mathrm{x}_{\mathbf{c}}/\mathrm{y}\} \to \chi)$$

Например: $(D : \mathrm{x}_1 = \mathbf{S}(\mathbf{0}))$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^2 = \mathrm{y} + \mathrm{u})$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение константы $\mathrm{s} = \mathbf{c}$

Все вхождения константы **c** в формулу ψ заменяются на “свежую” переменную y, и полученная формула χ заменяется на

$$\forall \mathrm{y}\ (D\{\mathrm{x}_{\mathbf{c}}/\mathrm{y}\} \to \chi)$$

Например: $(D : \mathrm{x}_{\mathbf{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{0}))$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}} = \mathrm{y} + \mathrm{u})$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{v}\ (\mathrm{v} = \mathbf{S}(\mathbf{0}) \to \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathrm{v})^{\mathbf{2}} = \mathrm{y} + \mathrm{u}))$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение функционального символа $\mathrm{s} = \mathbf{f}^{(n)}$

Пока это возможно,

- выбирается атом A с входящим в него термом $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$
- выбранный терм заменяется в атоме на "свежую" переменную y
- полученный атом A' заменяется на формулу
$$\forall \mathrm{y}\ (D\{\mathrm{x}_{\mathbf{f}}/\mathrm{y}, \mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}}/t_n\} \to A')$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение функционального символа $\mathrm{s} = \mathbf{f}^{(n)}$

Например: $(D : \mathrm{x}_{\cdot 2} = \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_1)$

$$\forall \mathrm{v}\ (\mathrm{v} = \mathbf{S}(\mathbf{0}) \to \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathrm{v})^{\mathbf{2}} = \mathrm{y} + \mathrm{u}))$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение функционального символа $\mathrm{s} = \mathbf{f}^{(n)}$

Например: $(D : \mathtt{x}_{.2} = \mathtt{x}_1 \times \mathtt{x}_1)$

$$\forall \mathtt{v}\ (\mathtt{v} = \mathbf{S}(\mathbf{0}) \to \forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \exists \mathtt{u}\ ((\mathtt{x} + \mathtt{v})^{2} = \mathtt{y} + \mathtt{u}))$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathtt{v}\ (\mathtt{v} = \mathbf{S}(\mathbf{0}) \to \forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \exists \mathtt{u}\ \forall \mathtt{w}\ (\mathtt{w} = (\mathtt{x} + \mathtt{v}) \times (\mathtt{x} + \mathtt{v}) \to \mathtt{w} = \mathtt{y} + \mathtt{u}))$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

И что же осталось для обоснования теоремы?

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

И что же осталось для обоснования теоремы?

Показать, что для **любой** формулы ψ до преобразования и соответствующей ей формулы ψ' после преобразования верно

$$\models_{\mathcal{T}\cup\{\varphi\}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}} \psi'$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

И что же осталось для обоснования теоремы?

Показать, что для **любой** формулы ψ до преобразования и соответствующей ей формулы ψ' после преобразования верно

$$\models_{\mathcal{T}\cup\{\varphi\}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}} \psi'$$

Можете попробовать доказать это самостоятельно ▼

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Теперь можно по умолчанию считать, что помимо
маленького набора понятий, указанного в сигнатуре σ,
теорией описывается
намного **большийй** набор понятий s:
все те предметы, функции и отношения,
которые можно **явно** определить
на основе имеющихся в σ

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

$$\mathtt{x}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:

$$x_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:

$$x_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$

$$\exists y\ (x_1 = y \times \mathbf{2})$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:
$$x_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$
- определение чётности числа ($\mathrm{Even}^{(1)}$):
$$\exists y\ (x_1 = y \times \mathbf{2})$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:

$$x_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\ \text{раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$

- определение чётности числа $(\mathrm{Even}^{(1)})$:

$$\exists y\ (x_1 = y \times \mathbf{2})$$

$$\forall y\ \forall z\ (x_1 = y \times z \to y = \mathbf{1} \lor z = \mathbf{1})$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:
$$x_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\dots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\dots))$$
- определение чётности числа ($\mathrm{Even}^{(1)}$):
$$\exists y\ (x_1 = y \times \mathbf{2})$$
- определение простоты числа ($\mathrm{Prime}^{(1)}$):
$$\forall y\ \forall z\ (x_1 = y \times z \to y = \mathbf{1} \lor z = \mathbf{1})$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:
$$\mathrm{x}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$
- определение чётности числа ($\mathrm{Even}^{(1)}$):
$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \times \mathbf{2})$$
- определение простоты числа ($\mathrm{Prime}^{(1)}$):
$$\forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \times \mathrm{z} \to \mathrm{y} = \mathbf{1} \vee \mathrm{z} = \mathbf{1})$$

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{Even}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{x} \geq \mathbf{4} \to \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{z}\ (\mathrm{Prime}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{Prime}(\mathrm{z})\ \&\ \mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}))$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:
$$x_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots \mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0}) \ldots))$$
- определение чётности числа ($\mathrm{Even}^{(1)}$):
$$\exists y\ (x_1 = y \times \mathbf{2})$$
- определение простоты числа ($\mathrm{Prime}^{(1)}$):
$$\forall y\ \forall z\ (x_1 = y \times z \to y = \mathbf{1} \vee z = \mathbf{1})$$
- гипотеза Гольдбаха:
$$\forall x\ (\mathrm{Even}(x)\ \&\ x \geq \mathbf{4} \to \\ \exists y\ \exists z\ (\mathrm{Prime}(y)\ \&\ \mathrm{Prime}(z)\ \&\ x = y + z))$$

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:
$$\mathrm{x}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$
- определение чётности числа ($\mathrm{Even}^{(1)}$):
$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \times \mathbf{2})$$
- определение простоты числа ($\mathrm{Prime}^{(1)}$):
$$\forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \times \mathrm{z} \to \mathrm{y} = \mathbf{1} \vee \mathrm{z} = \mathbf{1})$$
- гипотеза Гольдбаха:
$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{Even}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{x} \geq \mathbf{4} \to \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{z}\ (\mathrm{Prime}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{Prime}(\mathrm{z})\ \&\ \mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}))$$

(*и это далеко не всё, на что способна формальная арифметика*)

Формальная арифметика

Чтобы была *хоть какая-нибудь* возможность анализировать истинность предложений в естественной интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ логическими методами, необходимо иметь теорию $\mathcal{T}_{ar}$, адекватно описывающую эту интерпретацию:

- $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}_{ar}$
- теория $\mathcal{T}_{ar}$ полна

Формальная арифметика

Чтобы была *хоть какая-нибудь* возможность анализировать истинность предложений в естественной интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ логическими методами, необходимо иметь теорию $\mathcal{T}_{ar}$, адекватно описывающую эту интерпретацию:

- $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}_{ar}$
- теория $\mathcal{T}_{ar}$ полна

Существует ли такая теория $\mathcal{T}_{ar}$?

Формальная арифметика

Чтобы была *хоть какая-нибудь* возможность анализировать истинность предложений в естественной интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ логическими методами, необходимо иметь теорию $\mathcal{T}_{ar}$, адекватно описывающую эту интерпретацию:

- $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}_{ar}$
- теория $\mathcal{T}_{ar}$ полна

Существует ли такая теория $\mathcal{T}_{ar}$?

Да, например, элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$

Формальная арифметика

Чтобы была *хоть какая-нибудь* возможность анализировать истинность предложений в естественной интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ логическими методами, необходимо иметь теорию $\mathcal{T}_{ar}$, адекватно описывающую эту интерпретацию:

- $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}_{ar}$
- теория $\mathcal{T}_{ar}$ полна

Существует ли такая теория $\mathcal{T}_{ar}$?

Да, например, элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$

Но наличие такой теории **никак** не поможет в логическом анализе арифметических высказываний: чтобы описать элементарную теорию, необходимо решить проблему, для исследования которой эта теория описывается

Формальная арифметика

Чтобы была *хоть какая-нибудь* возможность анализировать истинность предложений в естественной интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ логическими методами, необходимо иметь теорию $\mathcal{T}_{ar}$, адекватно описывающую эту интерпретацию:

- $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}_{ar}$
- теория $\mathcal{T}_{ar}$ полна

Существует ли такая теория $\mathcal{T}_{ar}$?

Да, например, элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$

Но наличие такой теории **никак** не поможет в логическом анализе арифметических высказываний: чтобы описать элементарную теорию, необходимо решить проблему, для исследования которой эта теория описывается

А можно ли описать систему аксиом попроще и попонятнее?

Теорема Гёделя о неполноте

Любая рекурсивно перечислимая[1] теория в сигнатуре формальной арифметики, моделью которой является интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$, неполна

[1] Существует алгоритм, перечисляющий аксиомы одну за одной; останавливаться алгоритм не обязан

Теорема Гёделя о неполноте

Любая рекурсивно перечислимая[1] теория в сигнатуре формальной арифметики, моделью которой является интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$, неполна

Набросок доказательства

Докажем более простое утверждение:

любая *конечная* теория с моделью $\mathcal{I}_{ar}$ неполна

[1] Существует алгоритм, перечисляющий аксиомы одну за одной; останавливаться алгоритм не обязан

Теорема Гёделя о неполноте

Любая рекурсивно перечислимая[1] теория в сигнатуре формальной арифметики, моделью которой является интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$, неполна

Набросок доказательства

Докажем более простое утверждение:

любая *конечная* теория с моделью $\mathcal{I}_{ar}$ неполна

От противного предположим, что существует конечная полная теория $\mathcal{T}$, такая что $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}$

[1] Существует алгоритм, перечисляющий аксиомы одну за одной; останавливаться алгоритм не обязан

Теорема Гёделя о неполноте

Любая рекурсивно перечислимая[1] теория в сигнатуре формальной арифметики, моделью которой является интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$, неполна

Набросок доказательства

Докажем более простое утверждение:

любая *конечная* теория с моделью $\mathcal{I}_{ar}$ неполна

От противного предположим, что существует конечная полная теория $\mathcal{T}$, такая что $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}$

Докажем, что в любой такой теории $\mathcal{T}$ необходимо присутствует парадокс лжеца:

существует предложение,
утверждающее, что это предложение ложно

---

[1] Существует алгоритм, перечисляющий аксиомы одну за одной; останавливаться алгоритм не обязан

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Предметы интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ — целые неотрицательные числа, поэтому начнём доказательство с сопоставления каждой формуле такого числа[1]

[1] То есть с описания нумерации Гёделя

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Предметы интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ — целые неотрицательные числа, поэтому начнём доказательство с сопоставления каждой формуле такого числа[1]

Сопоставим натуральное число каждому символу алфавита сигнатуры σ_{ar}:

- $g(\mathbf{0}) = 1, \quad g(+) = 2, \quad g(\times) = 3, \quad g(=) = 4$
- $g(() = 5, \quad g(,) = 6, \quad g()) = 7$
- $g(\&) = 8, \quad g(\vee) = 9, \quad g(\to) = 10, \quad g(\neg) = 11,$ $g(\forall) = 12, \quad g(\exists) = 13$
- $g(\mathtt{x}_1) = 14, \quad g(\mathtt{x}_2) = 15, \quad g(x_3) = 16, \quad \ldots$

[1] То есть с описания нумерации Гёделя

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Сопоставим формуле φ натуральное число (код формулы)

$$g(\varphi) = p_1^{g(\varphi[1])} \times p_2^{g(\varphi[2])} \times \cdots \times p_{|\varphi|}^{g(\varphi[|\varphi|])}$$

Здесь

- p_i — i-е простое число
- $\varphi[i]$ — i-й символ в записи формулы φ
- $|\varphi|$ — размер записи формулы φ

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Сопоставим формуле φ натуральное число (код формулы)

$$g(\varphi) = p_1^{g(\varphi[1])} \times p_2^{g(\varphi[2])} \times \cdots \times p_{|\varphi|}^{g(\varphi[|\varphi|])}$$

Здесь

- p_i — i-е простое число
- $\varphi[i]$ — i-й символ в записи формулы φ
- $|\varphi|$ — размер записи формулы φ

Утверждение

Существует алгоритм, проверяющий, является ли число i, $i \in \mathbb{N}_0$, кодом формулы

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Сопоставим формуле φ натуральное число (код формулы)

$$g(\varphi) = p_1^{g(\varphi[1])} \times p_2^{g(\varphi[2])} \times \cdots \times p_{|\varphi|}^{g(\varphi[|\varphi|])}$$

Здесь

- p_i — i-е простое число
- $\varphi[i]$ — i-й символ в записи формулы φ
- $|\varphi|$ — размер записи формулы φ

Утверждение

Существует алгоритм, проверяющий, является ли число i, $i \in \mathbb{N}_0$, кодом формулы

(*здесь и дальше "алгоритм" — это* ***машина Тьюринга***,
с алфавитом ленты $\{0, 1, \Lambda\}$,
работающая с двоичными кодами чисел)

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Используя тот же приём со степенями простых чисел, можно определить код

- конечной последовательности формул
- конечной семантической таблицы
- конечного табличного вывода

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Используя тот же приём со степенями простых чисел, можно определить код

- конечной последовательности формул
- конечной семантической таблицы
- конечного табличного вывода

В теореме полноты табличного вывода был описан алгоритм построения успешного вывода $Tab(\varphi)$ для таблицы $\langle\ \mathcal{T} \mid \varphi\ \rangle$, где φ — произвольная $\mathcal{T}$-общезначимая формула

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Используя тот же приём со степенями простых чисел, можно определить код

- конечной последовательности формул
- конечной семантической таблицы
- конечного табличного вывода

В теореме полноты табличного вывода был описан алгоритм построения успешного вывода $Tab(\varphi)$ для таблицы $\langle\, \mathcal{T} \mid \varphi \,\rangle$, где φ — произвольная $\mathcal{T}$-общезначимая формула

Утверждение

Существует алгоритм, останавливающийся тогда и только тогда, когда на вход подан код какой-либо общезначимой формулы φ, и выдающий в ответ код вывода $Tab(\varphi)$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

И как существование всех этих алгоритмов нам поможет в сооружении парадокса лжеца?

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

И как существование всех этих алгоритмов нам поможет в сооружении парадокса лжеца?

Вычислимая функция — это частично определённое отображение $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такое что существует реализующий его алгоритм

(предполагаю, что понятие вычислимой функции вам знакомо, поэтому подробнее на нём не останавливаюсь)

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

И как существование всех этих алгоритмов нам поможет в сооружении парадокса лжеца?

Вычислимая функция — это частично определённое отображение $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такое что существует реализующий его алгоритм

(предполагаю, что понятие вычислимой функции вам знакомо, поэтому подробнее на нём не останавливаюсь)

График функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ — это множество всех пар чисел (i, j), таких что значение $f(i)$ определно и равно j

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ арифметизуемо, если существует формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ в сигнатуре формальной арифметики, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}] \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{d^n}) \in R$$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ арифметизуемо, если существует формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ в сигнатуре формальной арифметики, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}] \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{d^n}) \in R$$

Утверждение

График любой вычислимой функции арифметизуем

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ арифметизуемо, если существует формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ в сигнатуре формальной арифметики, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}] \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{d^n}) \in R$$

Утверждение

График любой вычислимой функции арифметизуем

(это утверждение непростое,
но доказывать его долго и сложно)

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ арифметизуемо, если существует формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$ в сигнатуре формальной арифметики, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}] \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{d^n}) \in R$$

Утверждение

График любой вычислимой функции арифметизуем

(это утверждение непростое,
но доказывать его долго и сложно)

Как следствие, арифметизуемым будет график такой функции:

$$f_t(i) = \begin{cases} g(Tab(g^{-1}(i))), & \text{если } i \text{ — код} \\ & \quad \mathcal{T}\text{-общезначимой формулы} \\ \text{не определено}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Это означает, что существует формула $\mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[d_1, d_2]$$

$$\Leftrightarrow$$

d_2 — код табличного вывода $\mathit{Tab}(\varphi)$,
где φ — формула, кодом которой является число d_1

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Это означает, что существует формула $Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})[d_1, d_2]$$

$$\Leftrightarrow$$

d_2 — код табличного вывода $Tab(\varphi)$,
где φ — формула, кодом которой является число d_1

Рассмотрим такую формулу $Val(\mathrm{x})$:

$$\exists \mathrm{y}\ (Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee Proof(neg(\mathrm{x}), \mathrm{y}))$$

($neg(\mathrm{x})$ — *терм, описывающий код формулы* $\neg g^{-1}(x)$)

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Это означает, что существует формула $Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})[d_1, d_2]$$

$$\Leftrightarrow$$

d_2 — код табличного вывода $Tab(\varphi)$,
где φ — формула, кодом которой является число d_1

Рассмотрим такую формулу $Val(\mathrm{x})$:

$$\exists \mathrm{y}\ (Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee Proof(neg(\mathrm{x}), \mathrm{y}))$$

($neg(\mathrm{x})$ — *терм, описывающий код формулы* $\neg g^{-1}(x)$)

Что означает формула Val?

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Это означает, что существует формула $Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})[d_1, d_2]$$

$$\Leftrightarrow$$

d_2 — код табличного вывода $Tab(\varphi)$,
где φ — формула, кодом которой является число d_1

Рассмотрим такую формулу $Val(\mathrm{x})$:

$$\exists \mathrm{y}\ (Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee Proof(neg(\mathrm{x}), \mathrm{y}))$$

($neg(\mathrm{x})$ — *терм, описывающий код формулы* $\neg g^{-1}(x)$)

Что означает формула Val?

$$\mathcal{I}_{ar} \models Val[d] \quad \Leftrightarrow \quad d \text{ — код формулы, истинной в } \mathcal{I}_{ar}$$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Это означает, что существует формула $Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y})[d_1, d_2]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$d_2 \text{ — код табличного вывода } Tab(\varphi),$$
$$\text{где } \varphi \text{ — формула, кодом которой является число } d_1$$

Рассмотрим такую формулу $Val(\mathrm{x})$:

$$\exists \mathrm{y}\ (Proof(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee Proof(neg(\mathrm{x}), \mathrm{y}))$$

($neg(\mathrm{x})$ — *терм, описывающий код формулы* $\neg g^{-1}(x)$)

Что означает формула Val?

$$\mathcal{I}_{ar} \models Val[d] \quad \Leftrightarrow \quad d \text{ — код формулы, истинной в } \mathcal{I}_{ar}$$

Мы выразили свойство истинности формул арифметики на языке самой арифметики, и теперь наконец-таки можем попытаться формализовать парадокс лжеца

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Лемма о диагонали

Для любой арифметической формулы $\varphi(\mathtt{x})$ существует арифметическое предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \varphi(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Лемма о диагонали

Для любой арифметической формулы $\varphi(\mathtt{x})$ существует арифметическое предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \varphi(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

(это второе нетривиальное утверждение, которое приведено без доказательства)

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Лемма о диагонали

Для любой арифметической формулы $\varphi(\mathtt{x})$ существует арифметическое предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \varphi(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

(это второе нетривиальное утверждение, которое приведено без доказательства)

Применим лемму о диагонали к формуле $\varphi = \neg \mathit{Val}$:

Существует предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \neg \mathit{Val}(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Лемма о диагонали

Для любой арифметической формулы $\varphi(\mathtt{x})$ существует арифметическое предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \varphi(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

(это второе нетривиальное утверждение, которое приведено без доказательства)

Применим лемму о диагонали к формуле $\varphi = \neg \mathit{Val}$:

Существует предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \neg \mathit{Val}(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

И что же это означает?

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Лемма о диагонали

Для любой арифметической формулы $\varphi(\mathrm{x})$ существует арифметическое предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \varphi(\mathrm{x}))[g(\psi)]$$

(это второе нетривиальное утверждение, которое приведено без доказательства)

Применим лемму о диагонали к формуле $\varphi = \neg Val$:

Существует предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \neg Val(\mathrm{x}))[g(\psi)]$$

И что же это означает?

Предложение ψ истинно в $\mathcal{I}_{ar}$ $\Leftrightarrow$ оно ложно в $\mathcal{I}_{ar}$

Аксиомы равенства

Предикатный символ $=^{(2)}$ нередко используется в “реальных” теориях с одинаковым смыслом: **равенство предметов**

Аксиомы равенства

Предикатный символ $=^{(2)}$ нередко используется в “реальных” теориях с одинаковым смыслом: **равенство предметов**

Аксиомы, используемые для придания символу $=^{(2)}$ смысла равенства, также оказываются похожими в разных теориях

Аксиомы равенства

Предикатный символ $=^{(2)}$ нередко используется в “реальных” теориях с одинаковым смыслом: **равенство предметов**

Аксиомы, используемые для придания символу $=^{(2)}$ смысла равенства, также оказываются похожими в разных теориях

Множество аксиом равенства произвольной сигнатуры σ, содержащей предикатный символ $=^{(2)}$, состоит из:

- всех аксиом теории равенства $\mathcal{T}_=$

Аксиомы равенства

Предикатный символ $=^{(2)}$ нередко используется в “реальных” теориях с одинаковым смыслом: **равенство предметов**

Аксиомы, используемые для придания символу $=^{(2)}$ смысла равенства, также оказываются похожими в разных теориях

Множество аксиом равенства произвольной сигнатуры σ, содержащей предикатный символ $=^{(2)}$, состоит из:

- всех аксиом теории равенства $\mathcal{T}_=$
- аксиом
  $$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \forall \widetilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{n}}\, (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{y}_\mathrm{n} \to \mathbf{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{n}))$$
  для всех функциональных символов $\mathbf{f}^{(n)}$ сигнатуры σ

Аксиомы равенства

Предикатный символ $=^{(2)}$ нередко используется в “реальных” теориях с одинаковым смыслом: **равенство предметов**

Аксиомы, используемые для придания символу $=^{(2)}$ смысла равенства, также оказываются похожими в разных теориях

Множество аксиом равенства произвольной сигнатуры σ, содержащей предикатный символ $=^{(2)}$, состоит из:

- всех аксиом теории равенства $\mathcal{T}_=$
- аксиом
  $$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \forall \widetilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{n}}\, (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{y}_\mathrm{n} \to \mathbf{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{n}))$$
  для всех функциональных символов $\mathbf{f}^{(n)}$ сигнатуры σ
- аксиом
  $$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \forall \widetilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{n}}\, (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{y}_\mathrm{n} \to (\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{n})))$$
  для всех предикатных символов $\mathrm{P}^{(n)}$ сигнатуры σ,

  кроме $=^{(2)}$

Арифметика Пресбургера

А есть ли нетривиальный фрагмент арифметики, который всё-таки можно адекватно описать “хорошей” системой аксиом?

Арифметика Пресбургера

А есть ли нетривиальный фрагмент арифметики, который всё-таки можно адекватно описать “хорошей” системой аксиом?

Исключим умножение из рассмотренного фрагмента арифметики:

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathsf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметика Пресбургера

А есть ли нетривиальный фрагмент арифметики, который всё-таки можно адекватно описать “хорошей” системой аксиом?

Исключим умножение из рассмотренного фрагмента арифметики:

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathsf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

$\mathcal{I}_{pa}$ — это интерпретация, получаемая из $\mathcal{I}_{ar}$ удалением оценки функционального символа $\times$

Арифметика Пресбургера

А есть ли нетривиальный фрагмент арифметики, который всё-таки можно адекватно описать “хорошей” системой аксиом?

Исключим умножение из рассмотренного фрагмента арифметики:

$$\sigma_{pa} = \langle\{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\}\rangle$$

$\mathcal{I}_{pa}$ — это интерпретация, получаемая из $\mathcal{I}_{ar}$ удалением оценки функционального символа $\times$

Каковы выразительные возможности такого фрагмента арифметики?

Арифметика Пресбургера

А есть ли нетривиальный фрагмент арифметики, который всё-таки можно адекватно описать “хорошей” системой аксиом?

Исключим умножение из рассмотренного фрагмента арифметики:

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

$\mathcal{I}_{pa}$ — это интерпретация, получаемая из $\mathcal{I}_{ar}$ удалением оценки функционального символа $\times$

Каковы выразительные возможности такого фрагмента арифметики?

Можно ли предоставить “хорошую” систему аксиом, адекватно описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_{pa}$?

Арифметика Пресбургера

А есть ли нетривиальный фрагмент арифметики, который всё-таки можно адекватно описать “хорошей” системой аксиом?

Исключим умножение из рассмотренного фрагмента арифметики:

$$\sigma_{pa} = \langle\{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\}\rangle$$

$\mathcal{I}_{pa}$ — это интерпретация, получаемая из $\mathcal{I}_{ar}$ удалением оценки функционального символа $\times$

Каковы выразительные возможности такого фрагмента арифметики?

Можно ли предоставить “хорошую” систему аксиом, адекватно описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_{pa}$?

Так как ответы на эти вопросы давно известны, начнём непосредственно с системы аксиом

Арифметика Пресбургера

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметика Пресбургера — это теория $\mathcal{T}_{pa}$ сигнатуры σ_{pa}, состоящая из

- аксиом равенства
- аксиом, определяемых схемой математической индукции
  - $\varphi(x)\{x/\mathbf{0}\} \,\&\, \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x)\{x/\mathbf{S}(x)\}) \to \forall x\, \varphi(x)$
- ещё четырёх аксиом:
  - $\forall x\, \neg(\mathbf{S}(x) = \mathbf{0})$
  - $\forall x\, \forall y\, (\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}(y) \to x = y)$
  - $\forall x\, (x + \mathbf{0} = x)$
  - $\forall x\, \forall y\, (x + \mathbf{S}(y) = \mathbf{S}(x + y))$

Арифметика Пресбургера

$$\sigma_{pa} = \langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

Арифметика Пресбургера — это теория $\mathcal{T}_{pa}$ сигнатуры σ_{pa}, состоящая из

- аксиом равенства
- аксиом, определяемых схемой математической индукции
  - $\varphi(\mathrm{x})\,\{\mathrm{x}/\mathbf{0}\} \,\&\, \forall \mathrm{x}\, (\varphi(\mathrm{x}) \to \varphi(\mathrm{x})\,\{\mathrm{x}/\mathbf{S}(\mathrm{x})\}) \to \forall \mathrm{x}\, \varphi(\mathrm{x})$
- ещё четырёх аксиом:
  - $\forall \mathrm{x}\, \neg(\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{0})$
  - $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{S}(\mathrm{y}) \to \mathrm{x} = \mathrm{y})$
  - $\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathrm{x})$
  - $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathbf{S}(\mathrm{y}) = \mathbf{S}(\mathrm{x} + \mathrm{y}))$

Утверждение. $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$

Арифметика Пресбургера

$$\sigma_{pa} = \langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

Арифметика Пресбургера — это теория $\mathcal{T}_{pa}$ сигнатуры σ_{pa}, состоящая из

- аксиом равенства
- аксиом, определяемых схемой математической индукции
  - $\varphi(x)\{x/\mathbf{0}\} \,\&\, \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x)\{x/\mathbf{S}(x)\}) \to \forall x\, \varphi(x)$
- ещё четырёх аксиом:
  - $\forall x\, \neg(\mathbf{S}(x) = \mathbf{0})$
  - $\forall x\, \forall y\, (\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}(y) \to x = y)$
  - $\forall x\, (x + \mathbf{0} = x)$
  - $\forall x\, \forall y\, (x + \mathbf{S}(y) = \mathbf{S}(x + y))$

Утверждение. $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$

Доказательство. Очевидно?

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Теория $\mathcal{T}_{pa}$ разрешима

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Теория $\mathcal{T}_{pa}$ разрешима

Доказательство.

На некоторое время забудем о том, что мы работаем с теорией $\mathcal{T}_{pa}$, и докажем более "содержательное" утверждение:

существует алгоритм проверки истинности формул
в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Теория $\mathcal{T}_{pa}$ разрешима

Доказательство.

На некоторое время забудем о том, что мы работаем с теорией $\mathcal{T}_{pa}$, и докажем более “содержательное” утверждение:

существует алгоритм проверки истинности формул
в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$

Также на некоторое время расширим интерпретацию $\mathcal{I}_{pa}$

- всеми натуральными числами α
- операцией умножения числа на β: βt — для каждого целого неотрицательного числа β
- отношениями $t_1 \equiv_\alpha^+ t_2$ для всех натуральных α: числа t_1 и t_2 равны по модулю α, и при этом $t_1 \leq t_2$
- отношениями $t_1 \equiv_\alpha t_2$ равенства чисел t_1, t_2 по модулю α:

$$t_1 \equiv_\alpha t_2 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 \equiv_\alpha^+ t_2 \text{ или } t_2 \equiv_\alpha^+ t_1$$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство.

Общая схема алгоритма:

1. замкнуть все переменные формулы кванторами всеобщности
2. шаг за шагом удалять по одному квантору, пока все кванторы не будут удалены, при этом
   - не добавляя свободных переменных и
   - не изменяя значение формулы
3. проверить истинность получившегося **бескванторного предложения**

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство.

Общая схема алгоритма:

1. замкнуть все переменные формулы кванторами всеобщности
2. шаг за шагом удалять по одному квантору, пока все кванторы не будут удалены, при этом
   - не добавляя свободных переменных и
   - не изменяя значение формулы
3. проверить истинность получившегося **бескванторного предложения**

После пункта 1, очевидно, значение формулы не изменяется

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство.

Общая схема алгоритма:

1. замкнуть все переменные формулы кванторами всеобщности
2. шаг за шагом удалять по одному квантору, пока все кванторы не будут удалены, при этом
   - не добавляя свободных переменных и
   - не изменяя значение формулы
3. проверить истинность получившегося **бескванторного предложения**

После пункта 1, очевидно, значение формулы не изменяется

Подалгоритм пункта 3 очевиден: можно *легко* проверить истинность формулы, состоящей **только** из связок $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ и атомов вида $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv_{\gamma}^{+} \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ и $\gamma \in \mathbb{N}$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство.

Общая схема алгоритма:

1. замкнуть все переменные формулы кванторами всеобщности
2. шаг за шагом удалять по одному квантору, пока все кванторы не будут удалены, при этом
   - не добавляя свободных переменных и
   - не изменяя значение формулы
3. проверить истинность получившегося **бескванторного предложения**

После пункта 1, очевидно, значение формулы не изменяется

Подалгоритм пункта 3 очевиден: можно *легко* проверить истинность формулы, состоящей **только** из связок $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ и атомов вида $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv_{\gamma}^{+} \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ и $\gamma \in \mathbb{N}$

Осталось показать, *как удаляется один квантор в пункте 2*

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора*

Формулу назовём бескванторной, если она не содержит кванторов

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора*

Формулу назовём бескванторной, если она не содержит кванторов

На каждом шаге любая подформула $Q\mathrm{x}\ \varphi$, такая что φ — бескванторная формула (*возможно, со свободными переменными*), преобразуется в бескванторную формулу ψ

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора*

Формулу назовём бескванторной, если она не содержит кванторов

На каждом шаге любая подформула $Q\mathrm{x}\ \varphi$, такая что φ — бескванторная формула (*возможно, со свободными переменными*), преобразуется в бескванторную формулу ψ

$\forall \mathrm{x}\ \varphi \approx \neg \exists \mathrm{x}\ \neg \varphi$, а значит, можно полагать, что $Q = \exists$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора*

Формулу назовём бескванторной, если она не содержит кванторов

На каждом шаге любая подформула $Q\mathrm{x}\ \varphi$, такая что φ — бескванторная формула (*возможно, со свободными переменными*), преобразуется в бескванторную формулу ψ

$\forall\mathrm{x}\ \varphi \approx \neg\exists\mathrm{x}\ \neg\varphi$, а значит, можно полагать, что $Q = \exists$

На основании законов булевой алгебры можно полагать, что φ — дизъюнктивная нормальная форма

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора*

Формулу назовём бескванторной, если она не содержит кванторов

На каждом шаге любая подформула $Q\mathrm{x}\ \varphi$, такая что φ — бескванторная формула (*возможно, со свободными переменными*), преобразуется в бескванторную формулу ψ

$\forall\mathrm{x}\ \varphi \approx \neg\exists\mathrm{x}\ \neg\varphi$, а значит, можно полагать, что $Q = \exists$

На основании законов булевой алгебры можно полагать, что φ — дизъюнктивная нормальная форма

$\exists\mathrm{x}\ (K_1 \vee \cdots \vee K_n) \approx \exists\mathrm{x}\ K_1 \vee \cdots \vee \exists\mathrm{x}\ K_n$, а значит, можно полагать, что φ — элементарная конъюнкция атомов вида $t_1 = t_2$ и $t_1 \equiv_\alpha^+ t_2$ и их отрицаний

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора*

Формулу назовём бескванторной, если она не содержит кванторов

На каждом шаге любая подформула $Q\mathrm{x}\ \varphi$, такая что φ — бескванторная формула (*возможно, со свободными переменными*), преобразуется в бескванторную формулу ψ

$\forall \mathrm{x}\ \varphi \approx \neg\exists \mathrm{x}\ \neg\varphi$, а значит, можно полагать, что $Q = \exists$

На основании законов булевой алгебры можно полагать, что φ — дизъюнктивная нормальная форма

$\exists \mathrm{x}\ (K_1 \vee \dots \vee K_n) \approx \exists \mathrm{x}\ K_1 \vee \dots \vee \exists \mathrm{x}\ K_n$, а значит, можно полагать, что φ — элементарная конъюнкция атомов вида $t_1 = t_2$ и $t_1 \equiv_\alpha^+ t_2$ и их отрицаний

Итог: достаточно показать, как преобразовать формулу $\exists \mathrm{x}\ K(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, где K — элементарная конъюнкция, в бескванторную, сохранив её арифметический смысл

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathrm{x}\ K(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Чтобы не перегружать слайды техническими выкладками, остановимся подробно на таком случае:

K — *конъюнкция* ***двух*** *литер*

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Чтобы не перегружать слайды техническими выкладками, остановимся подробно на таком случае:

K — *конъюнкция* ***двух*** *литер*

Вынесем $\mathtt{x}$ в каждой части каждого равенства каждого атома:

$\alpha\mathtt{x} + t_1 = \beta\mathtt{x} + t_2$ или $\alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv^{+}_{\gamma} \beta\mathtt{x} + t_2$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathrm{x}\ K(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Чтобы не перегружать слайды техническими выкладками, остановимся подробно на таком случае:

*K — конъюнкция **двух** литер*

Вынесем x в каждой части каждого равенства каждого атома:

$$\alpha\mathrm{x} + t_1 = \beta\mathrm{x} + t_2 \text{ или } \alpha\mathrm{x} + t_1 \equiv_\gamma^+ \beta\mathrm{x} + t_2$$

Упростим равенства сокращением x и перестановкой частей:

$$\alpha\mathrm{x} + t_1 = t_2, \quad \alpha\mathrm{x} + t_1 \equiv_\gamma^+ t_2, \quad t_1 \equiv_\gamma^+ \alpha\mathrm{x} + t_2$$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Чтобы не перегружать слайды техническими выкладками, остановимся подробно на таком случае:

K — *конъюнкция* ***двух*** *литер*

Вынесем $\mathtt{x}$ в каждой части каждого равенства каждого атома:

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = \beta\mathtt{x} + t_2 \text{ или } \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma^+ \beta\mathtt{x} + t_2$$

Упростим равенства сокращением $\mathtt{x}$ и перестановкой частей:

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2, \quad \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma^+ t_2, \quad t_1 \equiv_\gamma^+ \alpha\mathtt{x} + t_2$$

Для простоты опустим третий вид атомов

(с ними всё будет аналогично)

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Чтобы не перегружать слайды техническими выкладками, остановимся подробно на таком случае:

*K — конъюнкция **двух** литер*

Вынесем $\mathtt{x}$ в каждой части каждого равенства каждого атома:

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = \beta\mathtt{x} + t_2 \text{ или } \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv^+_\gamma \beta\mathtt{x} + t_2$$

Упростим равенства сокращением $\mathtt{x}$ и перестановкой частей:

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2, \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv^+_\gamma t_2, \qquad t_1 \equiv^+_\gamma \alpha\mathtt{x} + t_2$$

Для простоты опустим третий вид атомов

(с ними всё будет аналогично)

Тогда конъюнкцию двух литер можно переписать как систему из двух (не)равенств четырёх возможных видов:

$$\begin{array}{ll} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 & \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv^+_\gamma t_2 \\ \alpha\mathtt{x} + t_1 \neq t_2 & \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \not\equiv^+_\gamma t_2 \end{array}$$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Осталось показать, как удалить переменную $\mathtt{x}$ из любой такой системы, не изменяя **проекцию множества решений** на остальные переменные

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Осталось показать, как удалить переменную $\mathtt{x}$ из любой такой системы, не изменяя **проекцию множества решений** на остальные переменные

Случай 1: $\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 = t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \begin{cases} t_1 \equiv^{+}_{\alpha} t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 = \alpha t_4 + \beta t_1 \end{cases}$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Осталось показать, как удалить переменную $\mathtt{x}$ из любой такой системы, не изменяя **проекцию множества решений** на остальные переменные

Случай 1: $\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 = t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists\mathtt{x}} \begin{cases} t_1 \equiv^+_\alpha t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 = \alpha t_4 + \beta t_1 \end{cases}$

Случай 2: $\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \neq t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists\mathtt{x}} \begin{cases} t_1 \equiv^+_\alpha t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \neq \alpha t_4 + \beta t_1 \end{cases}$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Осталось показать, как удалить переменную $\mathtt{x}$ из любой такой системы, не изменяя **проекцию множества решений** на остальные переменные

Случай 1: $\left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 = t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists\mathtt{x}} \left\{\begin{array}{rcl} t_1 & \equiv^+_\alpha & t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 & = & \alpha t_4 + \beta t_1 \end{array}\right.$

Случай 2: $\left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \neq t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists\mathtt{x}} \left\{\begin{array}{rcl} t_1 & \equiv^+_\alpha & t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 & \neq & \alpha t_4 + \beta t_1 \end{array}\right.$

Случай 3: $\left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t_1 \neq t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \neq t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists\mathtt{x}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\; K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Осталось показать, как удалить переменную $\mathtt{x}$ из любой такой системы, не изменяя **проекцию множества решений** на остальные переменные

Случай 1: $\left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 = t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \left\{\begin{array}{rl} t_1 \equiv^{+}_{\alpha} & t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 = & \alpha t_4 + \beta t_1 \end{array}\right.$

Случай 2: $\left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \neq t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \left\{\begin{array}{rl} t_1 \equiv^{+}_{\alpha} & t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \neq & \alpha t_4 + \beta t_1 \end{array}\right.$

Случай 3: $\left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t_1 \neq t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \neq t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Случай 4: $\left\{\begin{array}{l} \alpha \mathtt{x} + t_1 \neq t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \equiv^{+}_{\gamma} t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} t_3 \equiv_{\text{НОД}(\beta,\gamma)} t_4$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Осталось показать, как удалить переменную $\mathtt{x}$ из любой такой системы, не изменяя **проекцию множества решений** на остальные переменные

Случай 1: $\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 = t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \begin{cases} t_1 \equiv^{+}_{\alpha} t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 = \alpha t_4 + \beta t_1 \end{cases}$

Случай 2: $\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \neq t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \begin{cases} t_1 \equiv^{+}_{\alpha} t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \neq \alpha t_4 + \beta t_1 \end{cases}$

Случай 3: $\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \neq t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \neq t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Случай 4: $\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \neq t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \equiv^{+}_{\gamma} t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} t_3 \equiv_{\text{НОД}(\beta,\gamma)} t_4$

Случай 5: $\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \equiv^{+}_{\gamma} t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \begin{cases} t_1 \equiv^{+}_{\alpha} t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \equiv^{+}_{\alpha\gamma} \alpha t_4 + \beta t_1 \end{cases}$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Случай 6: $\left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma^+ t_2 \\ \alpha\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma^+ t_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow_{\exists\mathtt{x}} \left\{\begin{array}{rl} t_1 \equiv_{\text{НОД}(\alpha,\gamma)} & t_2 \\ t_3 + t_2 \equiv_\gamma & t_4 + t_1 \end{array}\right.$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Случай 6: $\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv^+_\gamma t_2 \\ \alpha\mathtt{x} + t_3 \equiv^+_\gamma t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}} \begin{cases} t_1 \equiv_{\text{НОД}(\alpha,\gamma)} t_2 \\ t_3 + t_2 \equiv_\gamma t_4 + t_1 \end{cases}$

Случай 7: $\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv^+_\gamma t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv^+_\gamma t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}}$

$$\begin{cases} (\alpha - \beta)\mathtt{x} + t_1 + t_4 \equiv^+_\gamma t_2 + t_3 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv^+_\gamma t_4 \end{cases}$$

(*если* $\alpha > \beta$; *итеративно сводим к случаю 6*)

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathrm{x}\; K(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Случай 6: $\begin{cases} \alpha \mathrm{x} + t_1 \equiv_\gamma^+ t_2 \\ \alpha \mathrm{x} + t_3 \equiv_\gamma^+ t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathrm{x}} \begin{cases} t_1 \equiv_{\text{НОД}(\alpha,\gamma)} t_2 \\ t_3 + t_2 \equiv_\gamma t_4 + t_1 \end{cases}$

Случай 7: $\begin{cases} \alpha \mathrm{x} + t_1 \equiv_\gamma^+ t_2 \\ \beta \mathrm{x} + t_3 \equiv_\gamma^+ t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathrm{x}}$

$$\begin{cases} (\alpha - \beta)\mathrm{x} + t_1 + t_4 \equiv_\gamma^+ t_2 + t_3 \\ \beta \mathrm{x} + t_3 \equiv_\gamma^+ t_4 \end{cases}$$

(*если* $\alpha > \beta$; *итеративно сводим к случаю 6*)

Случай 8: $\begin{cases} \alpha \mathrm{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \beta \mathrm{x} + t_3 \equiv_\delta t_4 \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathrm{x}} \begin{cases} \delta\alpha \mathrm{x} + \delta t_1 \equiv_{\gamma\delta} \delta t_2 \\ \gamma\beta \mathrm{x} + \gamma t_3 \equiv_{\gamma\delta} \gamma t_4 \end{cases}$

(*свели к случаю 7*)

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Случай 9: $\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \not\equiv^{+}_{\gamma} t_2 \\ eq \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 + 1 \\ eq \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 + (\gamma - 1) \\ eq \end{cases} \end{array} \right.$$

(*свели к случаям 4, 5, 8*)

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Случай 9: $\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \not\equiv^{+}_{\gamma} t_2 \\ eq \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 + 1 \\ eq \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 + (\gamma - 1) \\ eq \end{cases} \end{array} \right.$$

(*свели к случаям 4, 5, 8*)

И как это всё использовать для анализа разрешимости $\mathcal{T}_{pa}$?

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *Элиминация квантора в формуле* $\exists \mathtt{x}\ K(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Случай 9: $\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \not\equiv^{+}_{\gamma} t_2 \\ eq \end{cases} \Leftrightarrow_{\exists \mathtt{x}}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 + 1 \\ eq \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 + (\gamma - 1) \\ eq \end{cases} \end{array}\right.$$

(*свели к случаям 4, 5, 8*)

И как это всё использовать для анализа разрешимости $\mathcal{T}_{pa}$?

Алгоритм проверки истинности формулы φ в $\mathcal{I}_{ar}$

- шаг за шагом преобразует формулу φ с сохранением её истинности/ложности, пока не будет получено **бескванторное предложение** ψ
- легко и очевидно проверяет истинность ψ

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Достаточно убедиться, что

- нововведённые понятия можно записать в сигнатуре σ_{pa}

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Достаточно убедиться, что

- нововведённые понятия можно записать в сигнатуре σ_{pa}
- $\mathcal{T}$-(не)общезначимость сохраняется на каждом шаге преобразования формулы

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Достаточно убедиться, что

- нововведённые понятия можно записать в сигнатуре σ_{pa}
- $\mathcal{T}$-(не)общезначимость сохраняется на каждом шаге преобразования формулы
- $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ — предложение, бескванторно построенное над атомами теории и нововведёнными понятиями

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Достаточно убедиться, что

- нововведённые понятия можно записать в сигнатуре σ_{pa}
- $\mathcal{T}$-(не)общезначимость сохраняется на каждом шаге преобразования формулы
- $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ — предложение, бескванторно построенное над атомами теории и нововведёнными понятиями

Как записать новые понятия в имеющейся сигнатуре:

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Достаточно убедиться, что

- нововведённые понятия можно записать в сигнатуре σ_{pa}
- $\mathcal{T}$-(не)общезначимость сохраняется на каждом шаге преобразования формулы
- $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ — предложение, бескванторно построенное над атомами теории и нововведёнными понятиями

Как записать новые понятия в имеющейся сигнатуре:

- α — это сокращение для $\underbrace{\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\alpha}(\mathbf{0})\ldots)$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Достаточно убедиться, что

- нововведённые понятия можно записать в сигнатуре σ_{pa}
- $\mathcal{T}$-(не)общезначимость сохраняется на каждом шаге преобразования формулы
- $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ — предложение, бескванторно построенное над атомами теории и нововведёнными понятиями

Как записать новые понятия в имеющейся сигнатуре:

- α — это сокращение для $\underbrace{\mathbf{S}(\dots\mathbf{S}}_{\alpha}(\mathbf{0})\dots)$
- αt — это сокращение для $\underbrace{t + \dots + t}_{\alpha}$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Достаточно убедиться, что

- нововведённые понятия можно записать в сигнатуре σ_{pa}
- $\mathcal{T}$-(не)общезначимость сохраняется на каждом шаге преобразования формулы
- $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ — предложение, бескванторно построенное над атомами теории и нововведёнными понятиями

Как записать новые понятия в имеющейся сигнатуре:

- α — это сокращение для $\underbrace{\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\alpha}(\mathbf{0})\ldots)$
- αt — это сокращение для $\underbrace{t + \cdots + t}_{\alpha}$
- $t_1 \equiv^+_\alpha t_2$ — это сокращение для $\exists \mathrm{y}\ (t_1 = t_2 + \alpha \mathrm{y})$ $(\mathrm{y} \notin \mathsf{Var}_{t_1} \cup \mathsf{Var}_{t_2})$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Почему $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$*:*

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Почему $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$*:*

Проверка равенств $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv_{\gamma}^{+} \beta$ в теории выглядит так:

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации* $\mathcal{I}_{pa}$ *к теории* $\mathcal{T}_{pa}$

Почему $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$*:*

Проверка равенств $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv_{\gamma}^{+} \beta$ в теории выглядит так:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ по аксиоме рефлексивности равенства

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Почему $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$*:*

Проверка равенств $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv_{\gamma}^{+} \beta$ в теории выглядит так:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ по аксиоме рефлексивности равенства
- $\not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \mathbf{0}$ для всех $\alpha > 0$ по аксиоме $\forall \mathrm{x}\, \neg(\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{0})$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Почему $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$:

Проверка равенств $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv^{+}_{\gamma} \beta$ в теории выглядит так:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ по аксиоме рефлексивности равенства
- $\not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \mathbf{0}$ для всех $\alpha > 0$ по аксиоме $\forall \mathrm{x}\, \neg(\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{0})$
- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} (\alpha - 1) = (\beta - 1)$ для всех $\alpha, \beta > 0$ по аксиоме $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{S}(\mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y})$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Почему $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$*:*

Проверка равенств $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv^{+}_{\gamma} \beta$ в теории выглядит так:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ по аксиоме рефлексивности равенства
- $\not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \mathbf{0}$ для всех $\alpha > 0$ по аксиоме $\forall \mathrm{x}\, \neg(\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{0})$
- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} (\alpha - 1) = (\beta - 1)$ для всех $\alpha, \beta > 0$ по аксиоме $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{S}(\mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y})$
  - аналогично (*хотя и технически более сложно*) можно показать, что $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \exists \mathrm{y}\, (\alpha = \beta + \gamma \mathrm{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \equiv_{\gamma} \beta$ и $\alpha \geq \beta$

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Доказательство. *От интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ к теории $\mathcal{T}_{pa}$*

Почему $\mathcal{I}_{pa} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$*:*

Проверка равенств $\alpha = \beta$ и $\alpha \equiv^{+}_{\gamma} \beta$ в теории выглядит так:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ по аксиоме рефлексивности равенства
- $\not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \mathbf{0}$ для всех $\alpha > 0$ по аксиоме $\forall \mathrm{x}\ \neg(\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{0})$
- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} (\alpha - 1) = (\beta - 1)$ для всех $\alpha, \beta > 0$ по аксиоме $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{S}(\mathrm{y}) \to \mathrm{x} = \mathrm{y})$
  - аналогично (*хотя и технически более сложно*) можно показать, что $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \exists \mathrm{y}\ (\alpha = \beta + \gamma \mathrm{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \equiv_{\gamma} \beta$ и $\alpha \geq \beta$

Почему преобразования формулы в доказательстве не изменяют её $\mathcal{T}_{pa}$-общезначимости: аналогичными рассуждениями можно показать, что $\mathcal{T}_{pa}$-общезначимость не изменяется при перестановке слагаемых, приведении подобных, прибавлении равенств конъюнкции, домножении равенства на число и остальных шагах преобразования формулы

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Вопрос на понимание:

А где в доказательстве применяется схема математической индукции?

Арифметика Пресбургера

Теорема полноты арифметики Пресбургера

Арифметика Пресбургера полна

Арифметика Пресбургера

Теорема полноты арифметики Пресбургера

Арифметика Пресбургера полна

Доказательство. Следует из соотношения $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$ и рассуждений в доказательстве теоремы разрешимости:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ получена из φ элиминацией кванторов
- для любого предложения ψ, к которому неприменима элиминация кванторов, верно $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$ или $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \neg\psi$ ▼

Арифметика Пресбургера

Теорема полноты арифметики Пресбургера

Арифметика Пресбургера полна

Доказательство. Следует из соотношения $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$ и рассуждений в доказательстве теоремы разрешимости:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ получена из φ элиминацией кванторов
- для любого предложения ψ, к которому неприменима элиминация кванторов, верно $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$ или $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \neg\psi$ ▼

Теорема о выразительности арифметики Пресбургера

Для любой формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$ сигнатуры σ_{pa} существует совокупность $\mathcal{E}$ систем линейных (не)равенств $=$, $\neq$, $\equiv_{\alpha}$, $\not\equiv_{\alpha}$, такая что φ выполняется в $\mathcal{I}_{pa}$ в точности на всех решениях системы $\mathcal{E}$ в целых неотрицательных числах

Арифметика Пресбургера

Теорема полноты арифметики Пресбургера

Арифметика Пресбургера полна

Доказательство. Следует из соотношения $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$ и рассуждений в доказательстве теоремы разрешимости:

- $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, где ψ получена из φ элиминацией кванторов
- для любого предложения ψ, к которому неприменима элиминация кванторов, верно $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$ или $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \neg\psi$ ▼

Теорема о выразительности арифметики Пресбургера

Для любой формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ сигнатуры σ_{pa} существует совокупность $\mathcal{E}$ систем линейных (не)равенств $=$, $\neq$, $\equiv_\alpha$, $\not\equiv_\alpha$, такая что φ выполняется в $\mathcal{I}_{pa}$ в точности на всех решениях системы $\mathcal{E}$ в целых неотрицательных числах

Доказательство. Если это неочевидно, то посмотрите ещё внимательнее в доказательство теоремы разрешимости