Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математические модели последовательных вычислений

Блок 23

Бисимуляция процессов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Напоминание из курса формальной верификации

На размеченных системах переходов можно вводить разные виды эквивалентности:

1. Трассовая (трудная для анализа): множества вычислений совпадают
2. Симуляционная (чуть проще): первая система имеет все те же возможности последовательного выполнения переходов, что и вторая, и наоборот
3. Бисимуляционная (ещё проще): как симуляционная, но возможности симуляции систем (в обе стороны) выражены одним отношением на состояниях (бисимуляцией)
   - И на бисимуляционно эквивалентных системах одинаково выполнимы все формулы широкого языка спецификации CTL*

С некоторыми поправками, процессный граф — это размеченная система переходов, и к нему можно применить эти отношения эквивалентности

Рассмотрим некоторый класс процессов $\mathcal{P}$ над действиями $\mathcal{A}$ с отношением переходов $\rightarrow \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}$

Отношение бисимуляции $\mathcal{B}$ процессов — это двуместное отношение на множестве $\mathcal{P} \setminus \{\checkmark\}$, обладающее следующими свойствами:

1. Если $p\mathcal{B}q$ и $p \xrightarrow{a} p'$, то существует процесс q', такой что $q \xrightarrow{a} q'$ и $p'\mathcal{B}q'$
2. Если $p\mathcal{B}q$ и $q \xrightarrow{a} q'$, то существует процесс p', такой что $p \xrightarrow{a} p'$ и $p'\mathcal{B}q'$
3. Если $p\mathcal{B}q$ и $p \xrightarrow{a} \checkmark$, то $q \xrightarrow{a} \checkmark$
4. Если $p\mathcal{B}q$ и $q \xrightarrow{a} \checkmark$, то $p \xrightarrow{a} \checkmark$

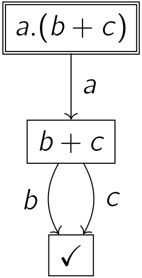
Процессы p и q бисимуляционно эквивалентны ($p \sim q$), если существует отношение бисимуляции $\mathcal{B}$, такое что $p\mathcal{B}q$

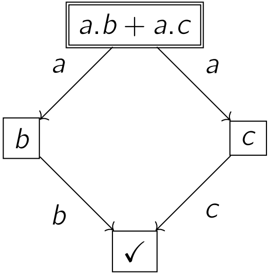
Можно понимать бисимуляционную эквивалентность процессов как бисимуляционную эквивалентность состояний системы переходов *в том смысле, как это рассказывалось в курсе формальной верификации*

Примеры

Если $\gamma(a, b) = \boldsymbol{\delta}$, то процессы $(a \| b)$ и $(a.b + b.a)$, так как их процессные графы изоморфны (изоморфизм процессных графов является их бисимуляцией):

А процессы $(a.(b + c))$ и $(a.b + a.c)$ не эквивалентны бисимуляционно





Основные эквивалентности процессов

($\boxed{\text{можете попробовать их доказать}}$)

Ниже p, q, r — незавершённые процессы, a, b — действия

BPA:

$$p + q \sim q + p \qquad p + p \sim p$$

$$(p + q) + r \sim p + (q + r) \qquad p.(q.r) \sim (p.q).r \qquad (p + q).r \sim p.r + q.r$$

PAP:

$$p \| q \sim p \mathbin{⫡} q + q \mathbin{⫡} p + p|q \qquad p\|q \sim q\|p \qquad p|q \sim q|p$$

$$(p\|q)\|r \sim p\|(q\|r) \qquad (p|q)|r \sim p|(q|r) \qquad (p \mathbin{⫡} q) \mathbin{⫡} r \sim p \mathbin{⫡} (q \mathbin{⫡} r)$$

$$(p \mathbin{⫡} q)|r \sim (p|r) \mathbin{⫡} q \qquad a \mathbin{⫡} p \sim a.p \qquad (a.p) \mathbin{⫡} q \sim a.(p\|q)$$

$$(p + q) \mathbin{⫡} r \sim p \mathbin{⫡} r + q \mathbin{⫡} r \qquad a|b \sim \gamma(a, b)$$

$$a|(b.p) \sim \gamma(a, b).p \qquad (a.p)|b \sim \gamma(a, b).p \qquad (a.p)|(b.q) \sim \gamma(a, b).(p\|q)$$

$$(p + q)|r \sim p|r + q|r \qquad p|(q + r) \sim p|q + p|r$$

ACP:

$$(p\boldsymbol{\delta})\|q \sim (p\|q)\boldsymbol{\delta} \qquad \boldsymbol{\delta} \mathbin{⫡} p \sim \boldsymbol{\delta} \qquad \boldsymbol{\delta}|p \sim \boldsymbol{\delta} \qquad p|\boldsymbol{\delta} \sim \boldsymbol{\delta} \qquad p + \boldsymbol{\delta} \sim p \qquad \boldsymbol{\delta}.p \sim \boldsymbol{\delta}$$

$$\partial_X(\delta) \sim \delta \qquad \partial_X(\partial_Y(p)) \sim \partial_{X \cup Y}(p) \qquad \partial_{\mathcal{A}}(p) \sim \boldsymbol{\delta} \qquad \partial_\emptyset(p) \sim p$$

$\partial_X(a) \sim a$, если $a \notin X$ $\qquad$ $\partial_X(a) \sim \delta$, если $a \in X$

$$\partial_X(p + q) \sim \partial_X(p) + \partial_X(q) \qquad \partial_X(p.q) \sim \partial_X(p).\partial_X(q)$$