

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 37

Хорновские логические программы:
переключательная лемма,
сильная полнота операционной семантики,
стандартное правило выбора подцели

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

$$\mathcal{R}_1 : p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y); \quad \mathcal{R}_2 : q(\mathbf{b}); \quad \mathcal{R}_3 : r(\mathbf{c}); \quad \mathcal{R}_4 : s(\mathbf{b});$$

Запросом $?p(X, Y), s(X)$ к этой программе порождаются, например, такие SLD-резольютивные вычисления, различающиеся тем, что в одном всегда выбирается первая подцель, а в другом — последняя:

$?p(X, Y), s(X)$	$?p(X, Y), s(X)$
$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, Y'/Y\}$	$\mathcal{R}'_4, 2 \downarrow \eta_1 = \{X/\mathbf{b}\}$
$?q(X), r(Y), s(X)$	$?p(\mathbf{b}, Y)$
$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_2 = \{X/\mathbf{b}\}$	$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \eta_2 = \{X'/\mathbf{b}, Y'/Y\}$
$?r(Y), s(\mathbf{b})$	$?q(\mathbf{b}), r(Y)$
$\mathcal{R}'_3, 1 \downarrow \theta_3 = \{Y/\mathbf{c}\}$	$\mathcal{R}'_3, 2 \downarrow \eta_3 = \{Y/\mathbf{c}\}$
$?s(\mathbf{b})$	$?q(\mathbf{b})$
$\mathcal{R}'_4, 1 \downarrow \theta_4 = \varepsilon$	$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \eta_4 = \varepsilon$
□	□

Результаты этих вычислений:

$$(\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4)|_{\{X, Y\}} = \{X/\mathbf{b}, Y/\mathbf{c}\}, \quad (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)|_{\{X, Y\}} = \{X/\mathbf{b}, Y/\mathbf{c}\} —$$

оказались одинаковыми

А это случайное совпадение, или так бывает всегда?

Переключательная лемма

Для любого SLD-резольтивного вычисления

$$Q = ?C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m$$

$\mathcal{R} \downarrow \theta_1$

$$?(C_1, \dots, C_{i-1}, \mathcal{R}^-, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m)\theta_1$$

$\mathcal{S} \downarrow \theta_2$

$$Q_1 = ?(C_1, \dots, C_{i-1}, \mathcal{R}^-, C_{i+1}, \dots, C_{j-1})\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^-\theta_2, (C_{j+1}, \dots, C_m)\theta_1\theta_2$$

существует SLD-резольтивное вычисление

$$Q = ?C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m$$

$\tilde{\mathcal{S}} \downarrow \eta_1$

$$?(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, \tilde{\mathcal{S}}^-, C_{j+1}, \dots, C_m)\eta_1$$

$\tilde{\mathcal{R}} \downarrow \eta_2$

$$Q_2 = ?(C_1, \dots, C_{i-1})\eta_1\eta_2, \tilde{\mathcal{R}}^-\eta_2, (C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, \tilde{\mathcal{S}}^-, C_{j+1}, \dots, C_m)\eta_1\eta_2,$$

такое что

▶ $\tilde{\mathcal{R}}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$ — варианты правил \mathcal{R} и \mathcal{S} соответственно и

▶ $Q_1 = Q_2$ и $\theta_1\theta_2 \upharpoonright \text{Var}_Q = \eta_1\eta_2 \upharpoonright \text{Var}_Q$

как для соотношения $i < j$, так и для $j < i$

(\mathcal{R}^+ и \mathcal{R}^- — так будем обозначать соответственно заголовок и тело правила \mathcal{R})

Переключательная лемма (доказательство)

Для технической простоты положим, что $i = 1$ и $j = m = 2$ (это не повлияет на общий ход рассуждений, но упростит иллюстрации)

То есть покажем, что для любого SLD-резольтивного вычисления

$$?A, B \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta_1} ?\mathcal{R}^{-}\theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S}, \theta_2} Q_1 = ?\mathcal{R}^{-}\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^{-}\theta_2$$

существует SLD-резольтивное вычисление

$$?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{R}}, \eta_2} Q_2 = ?\tilde{\mathcal{R}}^{-}\eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1\eta_2,$$

такое что $\tilde{\mathcal{R}}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$ — варианты правил \mathcal{R} и \mathcal{S} и $Q_2 = Q_1$

Рассмотрим произвольный вариант $\tilde{\mathcal{S}}$ правила \mathcal{S} ($\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}\mu$), в котором нет переменных из $\text{Var}_B \cup \text{Var}_{B\theta_1} \cup \text{Var}_{\mathcal{R}} \cup \text{Var}_{\mathcal{R}^{-}\theta_1} \cup \text{Dom}_{\theta_1}$

Так как $(\text{Var}_{B\theta_1} \cup \text{Var}_{\mathcal{R}^{-}\theta_1} \cap (\text{Var}_{\mathcal{S}} \cup \text{Var}_{\tilde{\mathcal{S}}})) = \emptyset$, то можно выбрать такое переименование μ , чтобы было верно $\text{Dom}_{\mu} \cap (\text{Var}_{B\theta_1} \cup \text{Var}_{\mathcal{R}^{-}\theta_1}) = \emptyset$

По условию верно $(B\theta_1)\theta_2 = \mathcal{S}^{+}\theta_2$

Следовательно, $B\theta_1\mu\theta_2 = B\theta_1\theta_2 = \mathcal{S}^{+}\theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^{+}\mu\theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^{+}\theta_1\mu\theta_2$

Значит, $\theta_1\mu\theta_2$ — унификатор атомов B и $\tilde{\mathcal{S}}^{+}$

Переключательная лемма (доказательство)

$$\begin{aligned} & ?A, B \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta_1} ?\mathcal{R}^- \theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S}, \theta_2} Q_1 = ?\mathcal{R}^- \theta_1 \theta_2, \mathcal{S}^- \theta_2 \\ \exists ? & ?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{R}}, \eta_2} Q_2 = ?\tilde{\mathcal{R}}^- \eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2 \\ & \mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}\mu \qquad B\theta_1 \mu \theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^+ \theta_1 \mu \theta_2 \end{aligned}$$

По следствию из **теоремы об унификации**, существует и наиболее общий унификатор η_1 этих атомов ($\theta_1 \mu \theta_2 = \eta_1 \rho$), и для него

$$?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1$$

Так как $(\text{Var}_B \cup \text{Var}_{\tilde{\mathcal{S}}}) \cap \text{Var}_{\mathcal{R}} = \emptyset$, то, используя переименование переменных, можно выбрать такой наиболее общий унификатор η_1 , для которого верно $\text{Dom}_{\eta_1} \cap \text{Var}_{\mathcal{R}} = \emptyset$

По условию верно $A\theta_1 = \mathcal{R}^+ \theta_1$

Следовательно, верно и $A\eta_1 \rho = A\theta_1 \mu \theta_2 = \mathcal{R}^+ \theta_1 \mu \theta_2 = \mathcal{R}^+ \eta_1 \rho = \mathcal{R}^+ \rho$

Значит, ρ — унификатор атомов $A\eta_1$ и \mathcal{R}^+ , и существует их наиболее общий унификатор η_2 ($\rho = \eta_2 \rho'$), и для него

$$?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, \eta_2} ?\mathcal{R}^- \eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2$$

Переключательная лемма (доказательство)

$$\begin{aligned} ?A, B \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta_1} ?\mathcal{R}^{-}\theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S}, \theta_2} Q_1 &= ?\mathcal{R}^{-}\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^{-}\theta_2 \\ \exists ?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, \eta_2} Q_2 &= ?\mathcal{R}^{-}\eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1\eta_2 \\ S = \tilde{S}\mu & \qquad B\theta_1\mu\theta_2 = \tilde{S}^{+}\theta_1\mu\theta_2 \\ (A\eta_1)\eta_2\rho' = \mathcal{R}^{+}\eta_2\rho' & \qquad \theta_1\mu\theta_2 = \eta_1\eta_2\rho' \end{aligned}$$

При этом $\mathcal{R}^{-}\eta_1 = \mathcal{R}^{-}$, а значит,

$\mathcal{R}^{-}\theta_1\theta_2 = \mathcal{R}^{-}\theta_1\mu\theta_2 = \mathcal{R}^{-}\eta_1\eta_2\rho' = \mathcal{R}^{-}\eta_2\rho'$, то есть атом $\mathcal{R}^{-}\theta_1\theta_2$ — пример атома $\mathcal{R}^{-}\eta_2$

Кроме того, $\tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1\eta_2\rho' = \tilde{\mathcal{S}}^{-}\theta_1\mu\theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^{-}\mu\theta_2 = \mathcal{S}^{-}\theta_2$, то есть атом $\mathcal{S}^{-}\theta_2$ — пример атома $\tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1\eta_2$

Применяя те же рассуждения о взаимосвязи унификаторов от нижнего вычисления к верхнему, можно получить и обратное: $\mathcal{R}^{-}\eta_2$ и $\tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1\eta_2\rho$ — примеры атомов $\mathcal{R}^{-}\theta_1\theta_2$ и $\mathcal{S}^{-}\theta_2$ соответственно

Если атомы являются примерами друг друга, то они (очевидно, что) являются вариантами друг друга, а значит, Q_1 — вариант Q_2 :

$Q_1 = Q_2\mu'$ для некоторого переименования μ'

Осталось заменить в нижнем вычислении унификатор η_2 на $\eta_2\mu'$ ▼

Сильная полнота операционной семантики

Правило выбора подцели — это отображение \mathfrak{R} , сопоставляющее каждому неуспешному вычислению \mathfrak{G} номер подцели $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ его последнего запроса

\mathfrak{R} -вычисление — это SLD-резольтивное вычисление, в котором для каждого префикса $\mathfrak{G} \rightarrow \mathcal{Q}$ резольвента \mathcal{Q} строится для $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ -й подцели. Результаты \mathfrak{R} -вычислений называются **\mathfrak{R} -вычислимыми ответами**

Теорема (о сильной полноте операционной семантики ХЛП). Для любого правила выбора подцели \mathfrak{R} и любого правильного ответа θ существует \mathfrak{R} -вычисляемый ответ, являющийся обобщением θ

Доказательство.

По **теореме о полноте операционной семантики ХЛП**, существует SLD-вычисляемый ответ η , являющийся обобщением θ

По **определению SLD-вычислимого ответа**, существует успешное вычисление с результатом η :

$$Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} Q_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

Сильная полнота операционной семантики

Доказательство.

$$\mathfrak{D} = (Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} Q_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square)$$

Если \mathfrak{D} является \mathfrak{R} -вычислением, то теорема доказана: η — \mathfrak{R} -вычисляемый ответ, являющийся обобщением θ

Иначе в \mathfrak{D} существует шаг i , такой что $\mathfrak{R}(Q_1, \dots, Q_i) = m \neq k_i$

Так как \mathfrak{D} завершается пустым запросом, то на некотором шаге j , $j > i$, резольвента строится для подцели, отвечающей m -й подцели запроса Q_j

Используя **переключательную лемму** не более n раз, можно переупорядочить шаги вычисления от i -го до j -го так, чтобы

- ▶ на i -м шаге резольвента строилась для m -й подцели,
- ▶ запрос Q_{j+1} остался прежним и
- ▶ значение $(\eta_i \dots \eta_j) \upharpoonright_{\text{Var}_{Q_j}}$ осталось прежним

Применяя такое переупорядочивание не более n раз, можно последовательно устранить все шаги вычисления в \mathfrak{D} , на которых подцель выбирается «неправильно» относительно \mathfrak{R} и тем самым перестроить \mathfrak{D} в успешное \mathfrak{R} -вычисление с тем же результатом ▼

Стандартное правило выбора подцели

Согласно теореме о сильной полноте операционной семантики ХЛП, независимо от того, какое именно используется правило выбора подцели \mathfrak{R} , всегда есть возможность, придерживаясь правила \mathfrak{R} , получить всевозможные SLD-вычислимые ответы

Чтобы упростить анализ и использование ХЛП, как на практике, так и в теории зачастую используется **стандартное правило выбора подцели**: в каждом запросе всегда выбирается первая (самая левая) подцель

В изображении способа получения SLD-резольвенты $Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, 1, \theta} Q_2$ согласно стандартному правилу номер подцели (1) будет опускаться:

$$Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta} Q_2$$