

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 37

Хорновские логические программы:  
переключательная лемма,  
сильная полнота операционной семантики,  
стандартное правило выбора подцели

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

## Вступление

$\mathcal{R}_1 : p(X, Y) \leftarrow q(X), r(Y); \quad \mathcal{R}_2 : q(\mathbf{b}); \quad \mathcal{R}_3 : r(\mathbf{c}); \quad \mathcal{R}_4 : s(\mathbf{b});$

Запросом  $?p(X, Y), s(X)$  к этой программе порождаются, например, такие SLD-резолутивные вычисления, различающиеся тем, что в одном всегда выбирается первая подцель, а в другом — последняя:

$?p(X, Y), s(X)$	$?p(X, Y), s(X)$
$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, Y'/Y\}$	$\mathcal{R}'_4, 2 \downarrow \eta_1 = \{X/\mathbf{b}\}$
$?q(X), r(Y), s(X)$	$?p(\mathbf{b}, Y)$
$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_2 = \{X/\mathbf{b}\}$	$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \eta_2 = \{X'/\mathbf{b}, Y'/Y\}$
$?r(Y), s(\mathbf{b})$	$?q(\mathbf{b}), r(Y)$
$\mathcal{R}'_3, 1 \downarrow \theta_3 = \{Y/\mathbf{c}\}$	$\mathcal{R}'_3, 2 \downarrow \eta_3 = \{Y/\mathbf{c}\}$
$?s(\mathbf{b})$	$?q(\mathbf{b})$
$\mathcal{R}'_4, 1 \downarrow \theta_4 = \varepsilon$	$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \eta_4 = \varepsilon$
□	□

Результаты этих вычислений:

$$(\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4)|_{\{X, Y\}} = \{X/\mathbf{b}, Y/\mathbf{c}\}, \quad (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)|_{\{X, Y\}} = \{X/\mathbf{b}, Y/\mathbf{c}\} —$$

оказались одинаковыми

А это случайное совпадение, или так бывает всегда?

## Переключательная лемма

Для любого SLD-резолютивного вычисления

$$Q_0 = ? C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m$$

$$\mathcal{R}_1 \downarrow \theta_1$$

$$?(C_1, \dots, C_{i-1}, \mathcal{R}_1^-, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m) \theta_1$$

$$\mathcal{R}_2 \downarrow \theta_2$$

$$Q_1 = ?(C_1, \dots, C_{i-1}, \mathcal{R}_1^-, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}) \theta_1 \theta_2, \mathcal{R}_2^-, \theta_2, (C_{j+1}, \dots, C_m) \theta_1 \theta_2$$

существует SLD-резолютивное вычисление

$$Q_0 = ? C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_m$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 \downarrow \eta_1$$

$$?(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, \tilde{\mathcal{R}}_2^-, C_{j+1}, \dots, C_m) \eta_1$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 \downarrow \eta_2$$

$$Q_2 = ?(C_1, \dots, C_{i-1}) \eta_1 \eta_2, \tilde{\mathcal{R}}_1^-, \eta_2, (C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, \tilde{\mathcal{R}}_2^-, C_{j+1}, \dots, C_m) \eta_1 \eta_2,$$

такое что

▶  $\tilde{\mathcal{R}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{R}}_2$  — варианты правил  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$  соответственно и

▶  $Q_1 = Q_2$  и  $\theta_1 \theta_2 \downarrow \text{Var}_{Q_0} = \eta_1 \eta_2 \downarrow \text{Var}_{Q_0}$

как для соотношения  $i < j$ , так и для  $j < i$

( $\mathcal{R}^+$  и  $\mathcal{R}^-$  — так будем обозначать соответственно заголовок и тело правила  $\mathcal{R}$ )

## Переключательная лемма (доказательство)

Для технической простоты положим, что  $i = 1$  и  $j = m = 2$  (это не повлияет на общий ход рассуждений, но упростит иллюстрации)

То есть покажем, что для любого SLD-резольтивного вычисления

$$?A, B \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta_1} ?\mathcal{R}^{-}\theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S}, \theta_2} Q_1 = ?\mathcal{R}^{-}\theta_1\theta_2, \mathcal{S}^{-}\theta_2$$

существует SLD-резольтивное вычисление

$$?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{R}}, \eta_2} Q_2 = ?\tilde{\mathcal{R}}^{-}\eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^{-}\eta_1\eta_2,$$

такое что  $\tilde{\mathcal{R}}$  и  $\tilde{\mathcal{S}}$  — варианты правил  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{S}$  и  $Q_2 = Q_1$

Рассмотрим вариант  $\tilde{\mathcal{S}}$  правила  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}\mu$ ), в котором нет переменных из запросов и правил изображённого выше вычисления

Так как  $\text{Var}_{B\theta_1} \cap (\text{Var}_{\mathcal{S}} \cup \text{Var}_{\tilde{\mathcal{S}}}) = \emptyset$ , то можно выбрать такое переименование  $\mu$ , чтобы было верно  $\text{Dom}_{\mu} \cap \text{Var}_{B\theta_1} = \emptyset$

По условию верно  $(B\theta_1)\theta_2 = \mathcal{S}^+\theta_2$

Следовательно,  $B\theta_1\mu\theta_2 = B\theta_1\theta_2 = \mathcal{S}^+\theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^+\mu\theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^+\theta_1\mu\theta_2$

Значит,  $\theta_1\mu\theta_2$  — унификатор атомов  $B$  и  $\tilde{\mathcal{S}}^+$

## Переключательная лемма (доказательство)

$$\begin{aligned}
 & ?A, B \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta_1} ?\mathcal{R}^- \theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S}, \theta_2} Q_1 = ?\mathcal{R}^- \theta_1 \theta_2, \mathcal{S}^- \theta_2 \\
 \exists ? & ?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{R}}, \eta_2} Q_2 = ?\tilde{\mathcal{R}}^- \eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2 \\
 & \mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}\mu \qquad B\theta_1 \mu \theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^+ \theta_1 \mu \theta_2
 \end{aligned}$$

По следствию из **теоремы об унификации**, существует и наиболее общий унификатор  $\eta_1$  этих атомов ( $\theta_1 \mu \theta_2 = \eta_1 \rho$ ), и для него

$$?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1$$

Так как  $(\text{Var}_B \cup \text{Var}_{\tilde{\mathcal{S}}}) \cap \text{Var}_{\mathcal{R}} = \emptyset$ , то, используя переименование переменных, можно выбрать такой наиболее общий унификатор  $\eta_1$ , для которого верно  $\text{Dom}_{\eta_1} \cap \text{Var}_{\mathcal{R}} = \emptyset$

По условию верно  $A\theta_1 = \mathcal{R}^+ \theta_1$

Следовательно, верно и  $A\eta_1 \rho = A\theta_1 \mu \theta_2 = \mathcal{R}^+ \theta_1 \mu \theta_2 = \mathcal{R}^+ \eta_1 \rho = \mathcal{R}^+ \rho$

Значит,  $\rho$  — унификатор атомов  $A\eta_1$  и  $\mathcal{R}^+$ , и существует их наиболее общий унификатор  $\eta_2$  ( $\rho = \eta_2 \rho'$ ), и для него

$$?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, \eta_2} ?\mathcal{R}^- \eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2$$

## Переключательная лемма (доказательство)

$$\begin{aligned}
 & ?A, B \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta_1} ?\mathcal{R}^- \theta_1, B\theta_1 \xrightarrow{\mathcal{S}, \theta_2} Q_1 = ?\mathcal{R}^- \theta_1 \theta_2, \mathcal{S}^- \theta_2 \\
 \exists & ?A, B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}, \eta_1} ?A\eta_1, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, \eta_2} Q_2 = ?\mathcal{R}^- \eta_2, \tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2 \\
 & \mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}\mu \qquad B\theta_1 \mu \theta_2 = \tilde{\mathcal{S}}^+ \theta_1 \mu \theta_2 \\
 & (A\eta_1)\eta_2 \rho' = \mathcal{R}^+ \eta_2 \rho' \qquad \theta_1 \mu \theta_2 = \eta_1 \eta_2 \rho'
 \end{aligned}$$

При этом  $\mathcal{R}^- \eta_1 = \mathcal{R}^-$ , а значит,

$\mathcal{R}^- \theta_1 \theta_2 = \mathcal{R}^- \theta_1 \mu \theta_2 = \mathcal{R}^- \eta_1 \eta_2 \rho' = \mathcal{R}^- \eta_2 \rho'$ : атом  $\mathcal{R}^- \theta_1 \theta_2$  — пример атома  $\mathcal{R}^- \eta_2$

Кроме того,  $\tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2 \rho' = \tilde{\mathcal{S}}^- \theta_1 \mu \theta_2 = \mathcal{S}^- \theta_2$ : атом  $\mathcal{S}^- \theta_2$  — пример атома  $\tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2$

Применяя те же рассуждения о взаимосвязи унификаторов от нижнего вычисления к верхнему, можно получить и обратное: атом  $\mathcal{R}^- \eta_2$  — пример атома  $\mathcal{R}^- \theta_1 \theta_2$ , и атом  $\tilde{\mathcal{S}}^- \eta_1 \eta_2 \rho$  — пример атома  $\mathcal{S}^- \theta_2$

Если атомы являются примерами друг друга, то они (**очевидно, что**) являются вариантами друг друга:  $Q_1 = Q_2 \mu'$  для некоторого переименования  $\mu'$

Осталось заменить в нижнем вычислении унификатор  $\eta_2$  на  $\eta_2 \mu'$  ▼

# Сильная полнота операционной семантики

**Правило выбора подцели** — это отображение  $\mathfrak{R}$ , сопоставляющее каждому неуспешному вычислению  $\mathfrak{G}$  номер подцели  $\mathfrak{R}(\mathfrak{Q})$  его последнего запроса

**$\mathfrak{R}$ -вычисление** — это SLD-резольтивное вычисление, в котором для каждого префикса  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{Q}$  резольвента  $\mathfrak{Q}$  строится для  $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ -й подцели. Результаты  $\mathfrak{R}$ -вычислений называются  **$\mathfrak{R}$ -вычислимыми ответами**

**Теорема (о сильной полноте операционной семантики ХЛП).** Для любого правила выбора подцели  $\mathfrak{R}$  и любого правильного ответа  $\theta$  существует  $\mathfrak{R}$ -вычисляемый ответ, являющийся обобщением  $\theta$

**Доказательство.**

По **теореме о полноте операционной семантики ХЛП**, существует SLD-вычисляемый ответ  $\eta$ , являющийся обобщением  $\theta$

По **определению SLD-вычислимого ответа**, существует успешное вычисление с результатом  $\eta$ :

$$Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} Q_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

# Сильная полнота операционной семантики

Доказательство.

$$\mathfrak{D} = (Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} Q_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square)$$

Если  $\mathfrak{D}$  является  $\mathfrak{R}$ -вычислением, то теорема доказана:  $\eta$  —  $\mathfrak{R}$ -вычисляемый ответ, являющийся обобщением  $\theta$

Иначе в  $\mathfrak{D}$  существует шаг  $i$ , такой что  $\mathfrak{R}(Q_1, \dots, Q_i) = m \neq k_i$

Так как  $\mathfrak{D}$  завершается пустым запросом, то на некотором шаге  $j$ ,  $j > i$ , резольвента строится для подцели, отвечающей  $m$ -й подцели запроса  $Q_j$

Используя **переключательную лемму** не более  $n$  раз, можно переупорядочить шаги вычисления от  $i$ -го до  $j$ -го так, чтобы

- ▶ на  $i$ -м шаге резольвента строилась для  $m$ -й подцели,
- ▶ запрос  $Q_{j+1}$  остался прежним и
- ▶ значение  $(\eta_i \dots \eta_j) \upharpoonright_{\text{Var}_{Q_j}}$  осталось прежним

Применяя такое переупорядочивание не более  $n$  раз, можно последовательно устранить все шаги вычисления в  $\mathfrak{D}$ , на которых подцель выбирается «неправильно» относительно  $\mathfrak{R}$  и тем самым перестроить  $\mathfrak{D}$  в успешное  $\mathfrak{R}$ -вычисление с тем же результатом ▼



# Стандартное правило выбора подцели

Согласно теореме о сильной полноте операционной семантики ХЛП, независимо от того, какое именно используется правило выбора подцели  $\mathfrak{R}$ , всегда есть возможность, придерживаясь правила  $\mathfrak{R}$ , получить всевозможные SLD-вычислимы ответы

Чтобы упростить анализ и использование ХЛП, как на практике, так и в теории зачастую используется **стандартное правило выбора подцели**: в каждом запросе всегда выбирается первая (самая левая) подцель

В изображении способа получения SLD-резольвенты  $Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, 1, \theta} Q_2$  согласно стандартному правилу номер подцели (1) будет опускаться:

$$Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}, \theta} Q_2$$