

Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

# ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Вариант 2017 г. (гр. 320–328), глава 3

Москва 2017

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>3 Синтез и сложность управляющих систем</b>	<b>6</b>
§1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций. . . . .	6
§2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем. . . . .	12
§3 Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона. . . . .	20
§4 Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения. Метод Шеннона . . . . .	29
§5 Нижние мощностные оценки функции Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для функций из специальных классов . . . . .	40
§6 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ . . . . .	46
<b>Литература</b>	<b>52</b>

## Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкрет-

ное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпонировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюн-

ктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются некоторые вопросы их структурного моделирования.

Во второй главе изучаются также эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывається полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем, а также изучаются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывається минимальность некоторых схем.

В четвертой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем (построение тестов для таблиц, синтез самокорректирующихся контактных схем).

## Глава 3

### Синтез и сложность управляющих систем

#### §1 Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ  $F$  можно реализовать некоторой его схемой  $\Sigma$ , а  $\Psi$  — какой-либо функционал сложности схем класса  $\mathcal{U}$ , то есть отображение  $\mathcal{U}$  во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности  $\Psi$  обладает свойством *монотонности*, то есть  $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$ , если  $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$ , и  $\Sigma'$  получается из  $\Sigma$  в результате удаления вершин или ребер (ср.с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность  $\Psi(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно

функционала  $\Psi$  в классе  $\mathcal{U}$  как минимальное значение величины  $\Psi(\Sigma)$  на множестве тех схем  $\Sigma$  из  $\mathcal{U}$ , которые реализуют  $F$ . При этом схема  $\Sigma$ , принадлежащая классу  $\mathcal{U}$ , которая реализует  $F$  и для которой  $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$ , называется *минимальной схемой* в классе  $\mathcal{U}$  относительно функционала  $\Psi$ . В силу монотонности функционала  $\Psi$ , минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину  $\Psi(F)$ , в том случае когда функционал  $\Psi$  совпадает с введенным в главе 2 функционалом  $L(D, R, \text{ и т. д.})$ , будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ  $F$* . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса  $\mathcal{U}$  относительно функционала сложности  $\Psi$* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  для любого из введенных классов вида  $\mathcal{U}_B^A$  (вида  $\mathcal{U}^A$ ) будем обозначать через  $\Psi_B^A(F)$  (соответственно  $\Psi^A(F)$ ), а функцию Шеннона для этого класса относительно  $\Psi$  — через  $\Psi_B^A(n)$  (соответственно  $\Psi^A(n)$ ). В обозначениях классов  $\mathcal{U}_B^C$ ,  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс  $B$  вида  $B_0$  будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей  $\Psi'(F)$  и  $\Psi''(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  в классах схем  $\mathcal{U}'$  и  $\mathcal{U}''$  соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если  $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$ . В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют  $\pi$ -схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности  $L(F)$  системы ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** *Для любой функции алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f \neq 0$ , существуют формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , и  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

**Следствие 1.** *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать  $\pi$ -схемой сложности 2, а также формулой из  $\mathcal{U}^\Phi$ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$



**Следствие 2.** В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

**Лемма 1.2.** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$  и  $f \neq 0$ , существуют  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$  и формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , которые реализуют  $f$  и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

*Доказательство.* В качестве  $\Sigma_f$  можно взять  $\pi$ -схему, которая получается из  $(1, 2^n)$ -КД порядка  $n$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  (рис. 1.1) в результате снятия тех его выходов, где реализу-

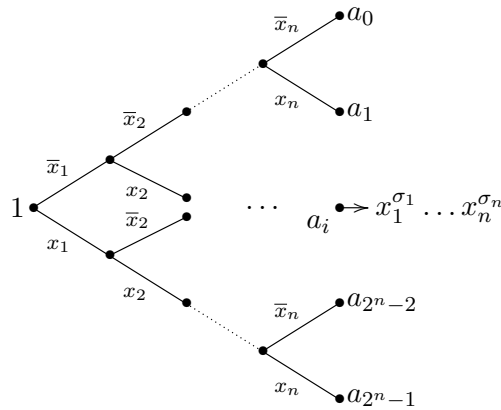


Рис. 1.1:  $(1, 2^n)$ -контактное дерево порядка  $n$

ются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ  $f$ , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула  $\mathcal{F}_f$  получается в результате моделирования построенной  $\pi$ -схемы  $\Sigma_f$  в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где  $L^-(\Sigma_f)$  — число размыкающих контактов в схеме  $\Sigma$ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка  $n$  равно  $2^n - 1$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.2)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.3)$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина  $w$  СФЭ  $\Sigma$  не достижима из ее вершины  $v$ , а СФЭ  $\Sigma'$  получается из СФЭ  $\Sigma$  в результате удаления вершины  $v$ , объявления вершины  $w$  начальной вершиной всех исходивших из  $v$  дуг и переноса в вершину  $w$  всех выходных БП, приписанных вершине  $v$ . Тогда СФЭ  $\Sigma'$  считается результатом применения к СФЭ  $\Sigma$  операции присоединения

вершины  $v$  к вершине  $w$ . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ  $\Sigma$  операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ  $\Sigma'$ , которая, очевидно, эквивалентна  $\Sigma$ .

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ  $G$ ,  $G \subseteq P_2(n)$ , через  $\vec{G}$  будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества  $G$ , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$  будем называть *универсальной системой* порядка  $n$ .

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка  $n$ , то есть ФАЛ  $\ell_n$  или ФАЛ  $\bar{\ell}_n$ ;
2. мультиплексорной ФАЛ  $\mu_n$  порядка  $n$ ;
3. дешифратора  $\vec{Q}_n$  (дизъюнктивного дешифратора  $\vec{J}_n$ ) порядка  $n$ ;
4. универсальной системы  $\vec{P}_2(n)$  порядка  $n$ .

**Лемма 1.3.** Для каждого натурального  $n$  в  $\mathcal{U}_B^C$  существует СФЭ  $U_n$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$  и сложность которой равна  $2^{2^n} - n$ .

*Доказательство.* В силу полноты базиса, в  $\mathcal{U}_B^C$  существует система формул  $\Sigma$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$ . Искомая СФЭ  $U_n$  является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна  $\Sigma$  и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ  $U_n$ , включая  $n$  ее входов, равно  $2^{2^n}$  и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. □

**Следствие.**

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

## §2 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

**Лемма 2.1.** *Если ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (2.1)$$

*Если при этом ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ (каждая БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ ), то*

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k). \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ , реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  следует, что  $R(\Sigma_f) \geq n$ , и поэтому, в силу соотношений (2.6) главы 2,

$$L^C(f) \geq L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ, то схема  $\Sigma_f$  должна содержать хотя бы один ФЭ  $\neg$  и, следовательно, в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Пусть теперь  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности  $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_i$ ,  $i \in [1, n]$ , следует, что либо контакт вида  $x_i$ , либо контакт вида  $\bar{x}_i$  встречается в КС  $\Sigma_f$ , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ , то как контакт вида  $x_i$ , так и контакт вида  $\bar{x}_i$  входят в  $\Sigma_f$ , и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

*Замечание.* Нижние оценки сложности ФАЛ  $f = s_n^{[0, n-1]}$ , вытекающие из леммы 2.1, доказывают минимальность  $\pi$ -схемы, моделирующей  $\exists \overline{x_1 \vee \dots \vee x_n} = f$ , в классе КС и минимальность формулы  $(\overline{x_1 \dots x_n}) = f$  в классе СФЭ, что устанавливает равенства  $L^K(f) = n$  и  $L^C(f) = n$ .

**Лемма 2.2.** *Для системы  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь  $\Sigma_F$  — приведенная  $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ  $F$ . Из приведенности  $\Sigma_F$  и условий леммы вытекает, что  $\Sigma_F$  — связный граф с не менее чем  $(m+1)$  вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\vec{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

*Замечание.* В силу следствия универсальная СФЭ  $U_n$ , построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе  $\mathcal{U}_B^C$ .

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для некоторых ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

**Лемма 2.3.** *Для любого натурального  $n$  выполняются неравенства:*

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}); \quad (2.4)$$

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2; \quad (2.5)$$

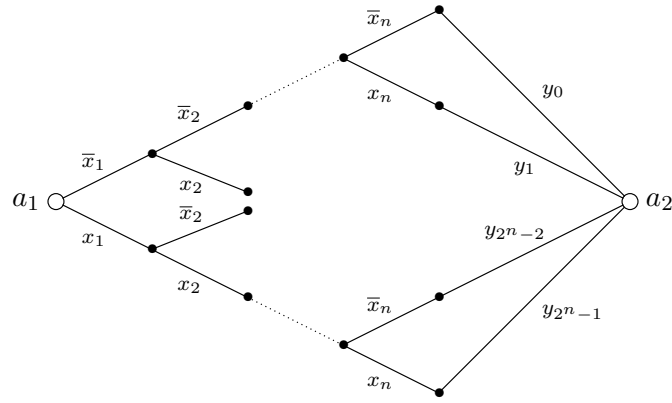
$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (2.6)$$

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (2.7)$$

*Доказательство.* В классе  $\mathcal{U}^C$  построим схемный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий первому неравенству (2.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП  $X(n)$  на группы  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ , где  $q = \lceil n/2 \rceil$ ;
2. возьмем дешифраторы  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  от БП  $x'$  и  $x''$  порядка  $q$  и  $(n - q)$  соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ , после чего конъюнктируем каждый выход  $\Sigma'$  с каждым выходом  $\Sigma''$ , а выходы всех использованных для этого  $2^n$  ФЭ  $\&$  (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Аналогичным образом строится дизъюнктивный схемный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий второму неравенству (2.4).

Рис. 2.1:  $\pi$ -схема для ФАЛ  $\mu_n$ 

Искомым контактным дешифратором порядка  $n$  является  $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рис. 1.1, а искомым контактным мультиплексором порядка  $n$  является  $\pi$ -схема, приведенная на рис. 2.1. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 1.1 и 2.1, равна  $2^{n+1} - 2$  и  $3 \cdot 2^n - 2$  соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.5) и (2.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно  $2^n - 1$ .

В результате моделирования указанной  $\pi$ -схемы можно построить неповторную по информационным БП формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left( \bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left( \dots \left( \bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.6), так как



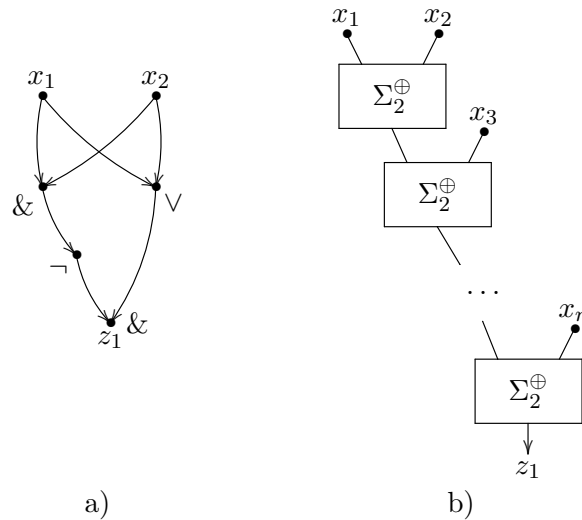


Рис. 2.2: СФЭ для ФАЛ  $\ell_2$  и  $\ell_n$

реализует ФАЛ  $\mu_n$  и имеет сложность  $4 \cdot 2^n - 3$ .

Неравенства (2.7) при  $n = 1$ , очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$ , со сложностью (2.7), является СФЭ  $\Sigma_n^\oplus$ , показанная на рис. 2.2а,б. Аналогичная СФЭ для ФАЛ  $\bar{\ell}_n$  получается в результате замены ФЭ & на ФЭ  $\vee$  и ФЭ  $\vee$  на ФЭ & в первой подсхеме вида  $\Sigma_2^\oplus$  схемы  $\Sigma_n^\oplus$  (см. рис. 2.2а).

Лемма доказана. □

**Следствие.**

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

**Лемма 2.4.** Если система ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  состоит из попарно различных ФАЛ от БП  $X(n)$ , отличных

от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

*Доказательство.* Возьмем приведенную  $(1, m)$ -КС  $\Sigma$ , реализующую систему ФАЛ  $F$ , и заметим, что при любом  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , в сети  $\Sigma|_\alpha$  имеется связная компонента, которая содержит вход  $\Sigma$  и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе  $\alpha$ . Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , придем к неравенству

$$2^{n-1}L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2.$$

*Замечание.* В силу следствия  $(1, 4)$ -КС с входом  $a$ , которая состоит из двух непересекающихся по внутренним вершинам  $(a - a)$ -цепей (циклов) длины 3 с ЭК проводимости  $\bar{x}_1x_2x_1$  и  $\bar{x}_1\bar{x}_2x_1$ , является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.

**Лемма 2.5.** Если для ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , и для любого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $f_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$ , то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f_0), L_{\&, \vee}^C(f_1)\} + 2. \quad (2.8)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma$  — минимальная по числу ФЭ  $\&$  и  $\vee$  СФЭ из класса  $\mathcal{U}^C$ , которая реализует ФАЛ  $f$  и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ  $\neg$ . Из условия леммы следует, что выход ФЭ  $\neg$ , присоединённого к входу  $x_n$  СФЭ  $\Sigma$  не может быть её выходом.

Пусть цепь  $C$  соединяет вход  $x_n$  СФЭ  $\Sigma$  с её выходом  $z_1$  и пусть константа  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , равна 0 тогда и только тогда, когда БП  $x_n$  подается в  $C$  либо на вход ФЭ  $\&$ , либо на вход ФЭ  $\neg$ , к выходу которого в  $C$  присоединён ФЭ  $\vee$ .

Рассмотрим СФЭ  $\widehat{\Sigma}$ , которая реализует ФАЛ  $f_\sigma$ ,  $f_\sigma \neq 0, 1$ , и получена из СФЭ  $\Sigma$  в результате подстановки  $x_n = \sigma$ , а также последующего ЭП на основе тождеств  $\tau^{\text{ПК}}$  (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедимся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа  $\&$  или  $\vee$ .

Действительно, в случае  $\sigma = 0$  из СФЭ  $\Sigma$  будет удален ФЭ  $\mathcal{E}'$ , являющийся первым ФЭ типа  $\&$  или  $\vee$  цепи  $C$ . Заметим, что выход ФЭ  $\mathcal{E}'$  не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ  $\neg$ , выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ  $f_\sigma$  была бы равна константе. Следовательно, на цепи  $C$  СФЭ  $\Sigma$  имеется ФЭ  $\mathcal{E}''$  типа  $\&$  или  $\vee$ , на вход которого поступает либо выход  $\mathcal{E}'$ , либо выход ФЭ  $\neg$ , присоединённого к выходу  $\mathcal{E}'$ . Легко видеть, что ФЭ  $\mathcal{E}''$  тоже будет удален при переходе от  $\Sigma$  к  $\widehat{\Sigma}$  и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&,\vee}(f) = L_{\&,\vee}(\Sigma) \geq L_{\&,\vee}(\widehat{\Sigma}) + 2 \geq L_{\&,\vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (2.8).

Случай  $\sigma = 1$ , когда БП  $x_n$  подаётся в  $C$  либо на вход ФЭ  $\vee$ , либо на вход ФЭ  $\neg$ , к выходу которого присоединён ФЭ типа  $\&$ , рассматривается аналогично.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.**

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1. \quad (2.9)$$

Действительно, (2.9) получается в результате применения леммы 2.5 последовательно ко всем информационным БП  $y_{2^n-1}, \dots, y_1$  и учитывая, что получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП  $x_1, \dots, x_n, y_0$ .

**Следствие 2.** Из (2.9) в силу леммы 4.1 главы 2 вытекает неравенство

$$D(\mu_n) \geq n + 1.$$

*Замечание.* В силу следствия 1 формула  $\bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$  является минимальной СФЭ, реализующей ФАЛ  $\mu_1$  и  $L^C(\mu_1) = 4$ .

### §3 Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона.

Рассмотрим структурные преобразования схем, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется *тождественной вершиной кратности  $k$* ,  $k \geq 0$ , если она одновременно является  $k$ -кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается *фиктивной*.

Простейшими видами суперпозиции схем являются: 1) операция *переименования входов схемы* с возможным их отождествлением; 2) операция *переименования выходов схемы*

с возможным их дублированием или снятием; 3) операция *объединения схем*, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая, как обычное объединение соответствующих графов.

Будем говорить, что схема  $\Sigma$  имеет вид  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , то есть является *суперпозицией схем*  $\Sigma''$  и  $\Sigma'$  без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы  $\Sigma''$  к (некоторым) выходам схемы  $\Sigma'$ . Указанная суперпозиция считается *бесповторной*, если различные входы  $\Sigma''$  присоединяются к различным выходным вершинам  $\Sigma'$ . Суперпозиция вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  называется *стыковкой*, если число входов схемы  $\Sigma''$  равно числу выходов схемы  $\Sigma'$  и каждый вход  $\Sigma''$  присоединяется к выходу  $\Sigma'$  с тем же номером.

Заметим, что операции объединения схем и переименования их входов (выходов) являются частными случаями введенной операции суперпозиции. Действительно, для объединения схем это очевидно, а любое переименование выходов (входов) схемы  $\Sigma$  можно задать суперпозицией вида  $\Sigma_2''(\Sigma_1''(\Sigma))$  (соответственно  $\Sigma(\Sigma_1'(\Sigma_2'))$ ), где схемы  $\Sigma_i'$  и  $\Sigma_i''$ ,  $i = 1, 2$ , состоят из тождественных вершин различной кратности.

Заметим также, что суперпозиция общего вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  всегда может быть сведена к стыковке вида  $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$ , где схемы  $\widehat{\Sigma}'$  и  $\widehat{\Sigma}''$  получаются из схем  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно добавлением тождественных вершин и переименованием выходов. Стыковка вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ , в свою очередь, может быть сведена к бесповторной стыковке вида  $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$ , где схемы  $\widehat{\Sigma}'$  и  $\widehat{\Sigma}''$  получаются из схем  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  снятием выходов и отождествлением входов соответственно.

Для суперпозиции схем вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  характерно, как правило, то, что схема  $\Sigma$  реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или ча-

сти) функций, реализованных схемой  $\Sigma'$  вместо (всех или части) входных переменных схемы  $\Sigma''$ . В случае стыковки, например, это означает, что схема  $\Sigma$  реализует набор функций вида  $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$ , где  $\mathcal{F}''$  и  $\mathcal{F}'$  — наборы функций, реализованные схемами  $\Sigma''$  и  $\Sigma'$  соответственно. Суперпозиция  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  считается *правильной*, если схема  $\Sigma$  обладает указанным свойством, и *корректной*, если, кроме того, в любой вершине  $\Sigma$ , которая соответствует выходной вершине  $\Sigma'$ , реализуется та же самая функция, что и в  $\Sigma'$ . Заметим, что правильная суперпозиция вида  $\Sigma''(\Sigma')$  автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины  $\Sigma'$  больше числа присоединяемых к ней входов  $\Sigma''$ . Заметим также, что с содержательной точки зрения корректность суперпозиции вида  $\Sigma''(\Sigma')$  позволяет одновременно использовать выходы  $\Sigma'$  в других суперпозициях.

Легко видеть, что любая СФЭ может быть получена в результате многократного применения операции суперпозиции, на каждом шаге которой происходит дублирование выхода или присоединение одного ФЭ к выходам СФЭ, первоначально состоящей из тождественных вершин.

Так, на рис. 2.2а показана СФЭ  $\Sigma_2^\oplus$ , имеющая сложность 4 и реализующая ФАЛ  $x_1 \oplus x_2$ , а на рис. 2.2б — СФЭ  $\Sigma_n^\oplus$ ,  $n \geq 3$ , которая является результатом «последовательной» суперпозиции  $(n - 1)$  схем  $\Sigma_2^\oplus$  и реализует ФАЛ  $\ell_n(x_1, \dots, x_n)$  со сложностью  $4n - 4$ .

Операция суперпозиции КС и все ее частные случаи определяются обычным образом. При этом пометками входов и выходов КС, в отличие от СФЭ, не обязательно являются переменные, а БП, управляющие проводимостью контактов КС, никак не связаны с ее входами.

Рассмотрим вопросы, связанные с нахождением функционирования для суперпозиций сетей или КС. Из соображений удобства будем допускать наличие в КС ориентированных (неориентированных) ребер без пометок, которые про-

водят при любых значениях управляющих входных БП в указанном (соответственно в любом) направлении и называются вентилями (соответственно *проводниками*). Это позволяет считать, что сети являются частным случаем КС и реализуют свои матрицы достижимости, состоящие из константных ФАЛ.

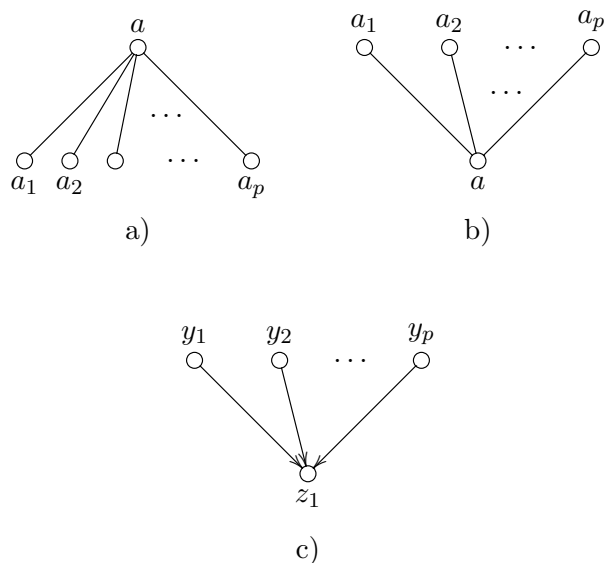
Легко видеть, что перестановка входов(выходов) КС порождает в реализуемой ею матрице такую же перестановку связанных с ними строк (соответственно столбцов), а снятие (дублирование) выходов этой КС — удаление (соответственно добавление) связанных с ними столбцов. Заметим также, что КС  $\Sigma$ , которая является объединением КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ , реализующих матрицы  $F'$  и  $F''$  соответственно, реализует матрицу  $F$  вида<sup>1</sup>:

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline F' & 0 \\ \hline 0 & F'' \\ \hline \end{array}$$

Обратимся, далее, к особенностям функционирования КС, получающихся в результате применения операций суперпозиции общего вида. Напомним, что суперпозиция общего вида сводится к последовательному выполнению операций переименования выходов, добавления тождественных вершин и стыковки. При этом стыковка, в свою очередь, сводится к снятию выходов, отождествлению входов и неповторной стыковке.

Заметим, что результат отождествления первых  $p$  входов КС  $\Sigma$  эквивалентен результату стыковки вида  $\Sigma(\Sigma')$ , а результат  $p$ -кратного дублирования первого выхода КС  $\Sigma$  — результату стыковки  $\Sigma''(\Sigma)$ , где КС  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  состоят из

<sup>1</sup>Предполагается, что номер любого входа (выхода) КС  $\Sigma'$  меньше номера любого входа (соответственно выхода) КС  $\Sigma''$  в КС  $\Sigma$ , а внутренняя упорядоченность полюсов КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  в КС  $\Sigma$  сохраняется. В остальных случаях происходит необходимая перестановка входов и выходов КС  $\Sigma$ .

Рис. 3.1: проводящие и вентильная звезды порядка  $p$ 

( $1, p$ )-проводящей звезды (см. рис. 3.1a,  $a$  — вход) и тождественных вершин. Заметим также, что стыковка вида  $\Sigma(\widehat{\Sigma})$ , где КС  $\widehat{\Sigma}$  состоит из ( $p, 1$ )-проводящей звезды (см. рис. 3.1b,  $a$  — выход) и тождественных вершин, соответствует отождествлению первых  $p$  выходов КС  $\Sigma$ .

В соответствии с общими правилами стыковка (суперпозиция) КС вида  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$  называется<sup>2</sup> *правильной*, если для матриц  $F$ ,  $F'$  и  $F''$ , реализуемых КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно, выполняется равенство

$$F = F' \cdot F''. \quad (3.1)$$

<sup>2</sup>Это определение соответствует «обычному» определению корректной суперпозиции в рамках модели так называемых преобразующих КС.



Указанная суперпозиция считается *корректной*, если, кроме того, в выходных вершинах подсхемы  $\Sigma''$  схемы  $\Sigma$  реализуются те же самые столбцы ФАЛ, что и в самой схеме  $\Sigma$ . Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП.

Заметим, что при правильной стыковке  $(1, p)$ -КС и  $(p, 1)$ -КС, реализующих строку и столбец из ФАЛ  $(f'_1, \dots, f'_p)$  и  $(f''_1, \dots, f''_p)$  соответственно, получается  $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ  $f'_1 f''_1 \vee \dots \vee f'_p f''_p$ , при правильном отождествлении входов (выходов) КС в реализуемой ею матрице происходит поразрядная дизъюнкция тех строк (соответственно столбцов), которые соответствуют отождествленным входам (соответственно выходам) и т. п.

Легко видеть, что операция переименования входов (выходов) КС без отождествления, операция объединения КС, а также операция последовательного соединения  $(1, 1)$ -КС корректны в любом случае. В то же время параллельное соединение  $(1, 1)$ -КС, при котором сначала отождествляются входы, а затем выходы соединяемых КС, не является, в общем случае, корректной операцией суперпозиции, хотя является при этом правильной суперпозицией, так как полученная КС реализует дизъюнкцию ФАЛ, реализуемых исходными КС. Заметим, что корректное дизъюнктивное соединение выходных ФАЛ можно осуществить с помощью стыковки исходной КС с вентильной звездой (см. рис. 3.1с).

Схема называется *разделительной по входам (выходам)*, если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так  $(p, 1)$ -схема  $\Sigma'' = \Sigma''(y_1, \dots, y_p; z_1)$ , показанная на рисунке 3.1с, является разделительной по входам схемой, которая называется *вентильной звездой порядка  $p$* . Примером разделительной по выходам (входам) КС может служить  $(1, 2^n)$  (соответственно  $(2^n, 1)$ ) контактное дерево порядка  $n$  (см. рис. 1.1).

Будем говорить, что КС  $\Sigma$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  *разделительна* на наборе  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть  $\Sigma|_\alpha$ . Следующее утверждение является обобщением известной леммы Шеннона (см. [32, 14]).

**Лемма 3.1.** *Пусть КС  $\Sigma$  является результатом стыковки вида  $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ , а  $F, F'$  и  $F''$  — матрицы, реализуемые КС  $\Sigma, \Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно. Тогда*

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'', \quad (3.2)$$

*если КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.*

*Доказательство.* Пусть КС  $\Sigma$  является сначала результатом бесповторной стыковки  $(p, q)$ -КС  $\Sigma'$  и  $(q, s)$ -КС  $\Sigma''$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть, кроме того,  $v'$  ( $v''$ ) — произвольная вершина КС  $\Sigma'$  (соответственно  $\Sigma''$ ), а ФАЛ  $f'_j$  (соответственно  $f''_j$ ),  $j \in [1, q]$ , — ФАЛ проводимости от вершины  $v'$  к  $j$ -му выходу в КС  $\Sigma'$  (соответственно от  $j$ -го входа к вершине  $v''$  в КС  $\Sigma''$ ). Докажем, что для ФАЛ  $f$  — ФАЛ проводимости от вершины  $v'$  к вершине  $v''$  в КС  $\Sigma$ , — справедливо неравенство

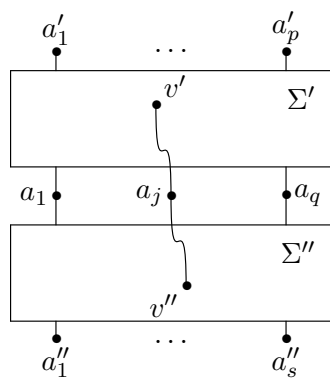
$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (3.3)$$

которое переходит в равенство

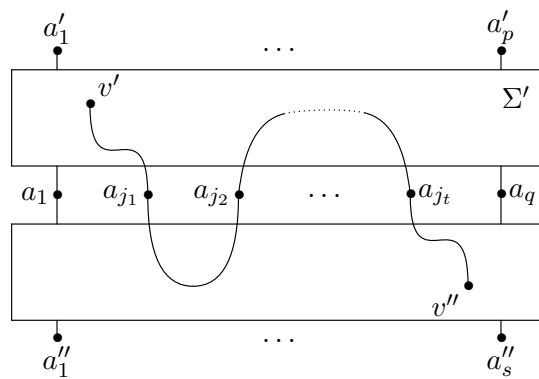
$$f(x_1, \dots, x_n) = f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (3.4)$$

если КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам или КС  $\Sigma''$  разделительна по входам.

Действительно, пусть  $a_j$ ,  $j \in [1, q]$ , — вершина КС  $\Sigma$ , которая получается в результате присоединения  $j$ -го входа КС  $\Sigma''$  к  $j$ -му выходу КС  $\Sigma'$  (см. рис. 3.2а). Справедливость неравенства (3.3) следует из того, что его правая



a)



b)

Рис. 3.2: к доказательству леммы 3.1

часть описывает «суммарную» проводимость тех  $(v' - v'')$ -цепей КС  $\Sigma$ , которые проходят через вершины  $a_1, \dots, a_q$  ровно один раз (см. рис. 3.2а). Любая другая  $(v' - v'')$ -цепь КС  $\Sigma$  проходит через указанные вершины не меньше трех раз (см. рис. 3.2б) и в случае разделительности КС  $\Sigma'$  по выходам или разделительности КС  $\Sigma''$  по входам имеет нулевую проводимость.

Из (3.3) и (3.4) непосредственно вытекает (3.2) с учетом того, что при  $v' = a'_i$  и  $v'' = a''_j$ , где  $i \in [1, p]$  и  $j \in [1, s]$ , левая(правая) часть этих соотношений равна элементу матрицы  $F$  (соответственно  $F' \cdot F''$ ), расположенному в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце.

Пусть теперь КС  $\Sigma$  получается из КС  $\Sigma''$  в результате применения операции отождествления входов, то есть  $\Sigma$  эквивалентна неповторной стыковке вида  $\Sigma'' (\Sigma')$ , где КС  $\Sigma'$  состоит из проводящей звезды и тождественных вершин. В этом случае неравенство (3.2) имеет вид  $F \geq \widehat{F}''$ , где матрица  $\widehat{F}''$  получается из матрицы  $F''$  в результате поразрядной дизъюнкции строк, соответствующих отождествляемым входам КС  $\Sigma''$ , и по-прежнему переходит в равенство, если КС  $\Sigma''$  разделительна по входам. В последнем случае, кроме того, из аналогичного равенства, связанного с КС  $\Sigma''$ , которая получается из КС  $\Sigma''$  в результате объявления ее входов входами и, одновременно, выходами  $\check{\Sigma}''$ , следует разделительность КС  $\Sigma$  по входам.

Заметим, наконец, что стыковка общего вида  $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$  сводится к последовательному выполнению отождествления входов вида  $\widehat{\Sigma}'' = \Sigma'' (\check{\Sigma}'')$  и неповторной стыковки вида  $\Sigma = \widehat{\Sigma}'' (\widehat{\Sigma}')$ , где КС  $\check{\Sigma}''$  состоит из проводящей звезды и тождественных вершин, а КС  $\widehat{\Sigma}'$  получается из КС  $\Sigma'$  снятием некоторых выходов. При этом неравенство (в случае разделительности КС  $\Sigma''$  по входам равенство) (3.2) для КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  вытекает из установленных выше аналогичных соотношений для КС  $\widehat{\Sigma}''$ ,  $\check{\Sigma}''$ ,  $\Sigma''$  и КС  $\Sigma$ ,  $\widehat{\Sigma}'$ ,  $\widehat{\Sigma}''$  в силу ассоци-

ативности произведения матриц. Случай разделительности КС  $\Sigma'$  по выходам рассматривается аналогично.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.** *В случае разделительности КС  $\Sigma''$  по входам в каждой вершине КС  $\Sigma$ ,  $\Sigma = \Sigma''(\Sigma)$ , которая соответствует выходу КС  $\Sigma'$ , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС  $\Sigma'$ , то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.*

Действительно, полагая  $v' = a'_i$  и  $v'' = a_j$ , где  $i \in [1, p]$ , а  $j \in [1, q]$ , из (3.4) получим требуемое равенство  $f = f'_j$ . Случай стыковки общего вида рассматривается аналогично.

**Следствие 2.** *Равенство (3.2) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС  $\Sigma''$  разделительна по входам или КС  $\Sigma'$  разделительна по выходам.*

#### **§4 Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения. Метод Шеннона**

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и  $\pi$ -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [21] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Рассмотрим сначала специальный частный случай корректной суперпозиции КС — операцию присоединения к выходам одноходовой КС одного или двух противоположных контактов, которая заключается в следующем. Пусть  $(1, m)$ -КС  $\Sigma$  получается из  $(1, \check{m})$ -КС  $\check{\Sigma}$  в результате добавления но-

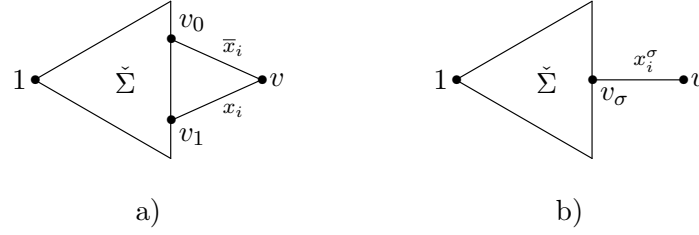


Рис. 4.1: присоединение одного или двух противоположных контактов

вой выходной вершины  $v$ , которая соединяется с выходными вершинами  $v_0$  и  $v_1$  КС  $\tilde{\Sigma}$  контактами  $\bar{x}_i$  и  $x_i$  соответственно (см. рис. 4.1a). Тогда в вершинах  $v_0$  и  $v_1$  КС  $\Sigma$  в силу нулевой проводимости между входами присоединяемой (2, 1)-КС реализуются те же самые ФАЛ  $g_0$  и  $g_1$ , что и в КС  $\tilde{\Sigma}$ , а в вершине  $v$  — ФАЛ  $g$  вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1. \quad (4.1)$$

Аналогичные соотношения будут справедливы и тогда, когда вершина  $v$  КС  $\Sigma$  связана с вершиной  $v_\sigma$  только одним контактом вида  $x_i^\sigma$ ,  $\sigma \in \{0, 1\}$  (см. рис. 4.1b). В этом случае в вершине  $v$  КС  $\Sigma$  реализуется ФАЛ

$$g = x_i^\sigma g_\sigma, \quad (4.2)$$

а в вершине  $v_\sigma$  по-прежнему реализуется ФАЛ  $g_\sigma$ .

Описанные выше операции присоединения одного или двух противоположенных контактов очевидным образом распространяются на случай КС с несколькими входами. Кроме того, они допускают моделирование в классе СФЭ в базисе  $B_0$ . Так, переход от СФЭ  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{U} \in \mathcal{U}^C$ , которая реализует в выходных вершинах  $v_0$  и  $v_1$  ФАЛ  $g_0$  и  $g_1$  соответственно, к СФЭ  $U$ ,  $U \in \mathcal{U}^C$ , которая реализует ФАЛ  $g$ , удовлетворяющую (4.1) ((4.2)), показан на рис. 4.2a (соответственно 4.2b).

Заметим, что при этом разложение (4.1) в случае  $g_{\bar{\sigma}} \equiv 1$  эквивалентно представлению

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma},$$

схемная реализация которого показана на рис. 4.2с.

Определим, далее, *каскадную* КС как приведенную КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается *полной*, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта. Так, например, к числу ККС относится контактное дерево, показанное на рис. 1.1, причем соответствующее ему  $(2^n, 1)$ -КД является полной ККС.

Заметим, далее, что, в силу отмеченных выше свойств рассматриваемых операций присоединения контактов, ККС имеет нулевые ФАЛ проводимости между своими входами. Отсюда следует, что в каждой вершине ККС реализуется столбец, в котором никакие две ФАЛ не обращаются в единицу одновременно, причем в случае полной ККС дизъюнкция всех ФАЛ этого столбца дает 1. Так, в частности, в каждой вершине полной ККС с двумя входами реализуется столбец из двух противоположных ФАЛ.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется *неполной вершиной* этой ККС. Будем говорить, что ККС  $\Sigma''$  является *дополнением* неполной ККС  $\Sigma'$ , если она получается в результате соединения всех неполных вершин  $\Sigma'$  отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом, очевидно,

$$L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma'), \quad (4.3)$$

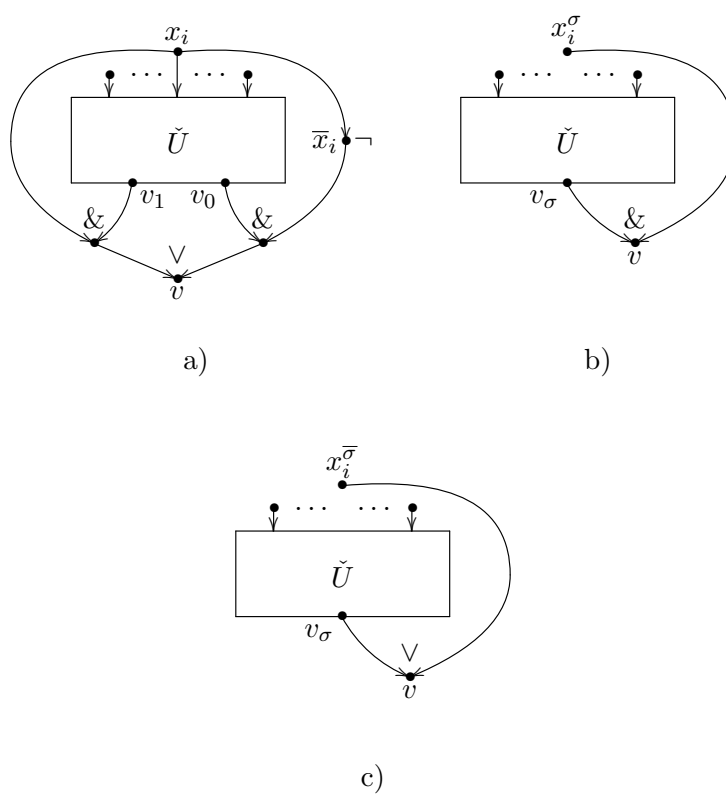


Рис. 4.2: к моделированию операций присоединения контактов в классе СФЭ



а объединение  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  является полной ККС. Дополнение  $\Sigma''$  к полной ККС  $\Sigma$  с 1 входом будем называть *инверсной* к  $\Sigma'$  ККС. Заметим, что ККС  $\Sigma''$ , в силу отмеченных выше свойств полных ККС, реализует систему ФАЛ  $\bar{F}'$ , если ККС  $\Sigma'$  реализует систему ФАЛ  $F'$ . Таким образом, в силу (4.3) справедливо следующее утверждение

**Лемма 4.1.** *Если  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma'$  реализует систему ФАЛ  $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$ , то существует  $(1, m)$ -ККС  $\Sigma''$ , которая реализует систему ФАЛ  $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$  и для которой  $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$ .*

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики  $F = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $F \in P_2^m(n)$ , строить  $(1, m)$ -КС  $\Sigma_F$ ,  $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$ , и СФЭ  $U_F$ ,  $U_F \in \mathcal{U}^C$ , которые реализуют  $F$ . Будем считать, что все ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  системы  $F$  различны, отличны от констант, и для каждой БП  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от  $x_i$ .

Разложим ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  сначала по БП  $x_1$ , потом по БП  $x_2$  и так далее. При этом построим последовательности множеств  $G_i$  и  $\hat{G}_i$ , состоящих из ФАЛ от БП  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , такие, что

1.  $G_i$  состоит из всех различных ФАЛ  $g(x_i, \dots, x_n)$  вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где  $1 \leq j \leq m$ ,  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$ ;

2.  $\hat{G}_i$  состоит из всех различных функций  $g$ ,  $g \in G_i$ , которые существенно зависят от  $x_i$ .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \hat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ  $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$  не пусты и попарно не пересекаются.

Заметим, что любую ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , где  $1 \leq i \leq n$ , можно представить в виде (4.1)

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1,$$

где  $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , и, следовательно,  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$  для всех  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ . Если при этом для некоторого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $g_\sigma$  равна 0, то вместо (4.1) будем использовать разложение (4.2)

$$g = x_i^\sigma g_\sigma,$$

где  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$ .

Построим КС  $\check{\Sigma}_F$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , где  $G_F = \widehat{G}_1 \cup \dots \cup \widehat{G}_n$  с помощью операций присоединения одного или двух противоположных контактов. При этом для каждого  $i$ ,  $i = n, (n-1), \dots, 1$ , каждая ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , реализуется согласно (4.1) ((4.2)) на выходе  $v$ , который при  $\alpha = 0, 1$  (соответственно  $\alpha = \sigma$ ) соединен контактом вида  $x_i^\alpha$  с тем выходом  $v_\alpha$ , где реализуется ФАЛ  $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$  так, как это показано на рис. 4.1а (соответственно рис. 4.1б).

Заметим, что указанное присоединение одного или двух противоположенных контактов не изменяет ФАЛ, реализуемые в вершинах  $v_\alpha$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$ .

Для получения искомой КС  $\Sigma_F$  достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС  $\check{\Sigma}_F$ , в которых реализуются ФАЛ, отличные от  $f_1, \dots, f_m$ .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ  $\check{U}_F$ , реализующая систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , с той лишь разницей, что:

1. сначала реализуются все ФАЛ вида  $\bar{x}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , которые встречаются в КС  $\Sigma_F$ ;

2. для всех  $i$ ,  $i = (n-1), \dots, 1$ , разложение (4.1), где  $g \in \widehat{G}_i$  и  $g_0, g_1 \in \check{G}_{i+1}$ , реализуется так, как показано на рис. 4.2а, а разложение (4.2), применяемое в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 0$  (разложение

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} x_i^{\sigma} = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} \quad (4.4)$$

в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 1$ ), — так, как показано на рис. 4.2б (соответственно 4.2с);

3. каждая ФАЛ вида  $g_{\sigma} x_i^{\sigma}$ , используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (4.1) или (4.2) для различных ФАЛ  $g$ , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ  $U_F$ , реализующая систему ФАЛ  $F$  и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ  $\check{U}_F$  в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из  $F$ .

Пусть, например,  $F = (f_1, f_2)$ , где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \widehat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \widehat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \widehat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \widehat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \widehat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}. \end{aligned}$$

На рис. 4.3 показана построенная для данной системы ФАЛ КС  $\check{\Sigma}_F$ , вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 4.4 — соответствующая ей КС  $\Sigma_F$ , а на рис. 4.5 — СФЭ  $U_F$ .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ  $\ell_n$ , где  $n \geq 2$ , является известная схема

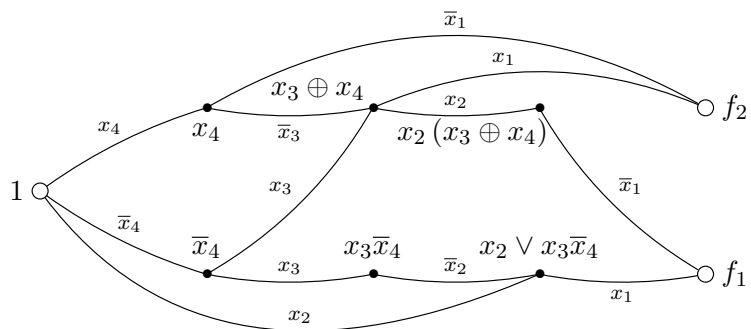


Рис. 4.3: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

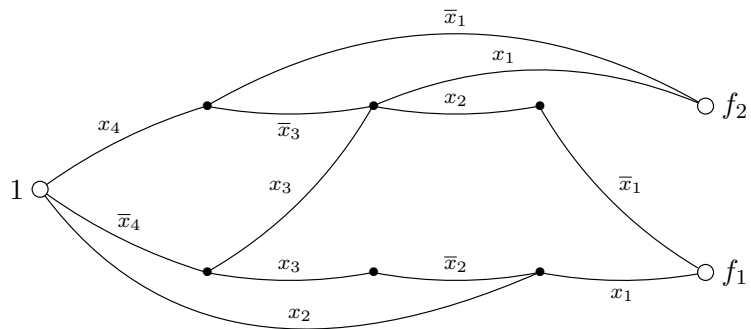


Рис. 4.4: пример КС, построенной методом каскадов

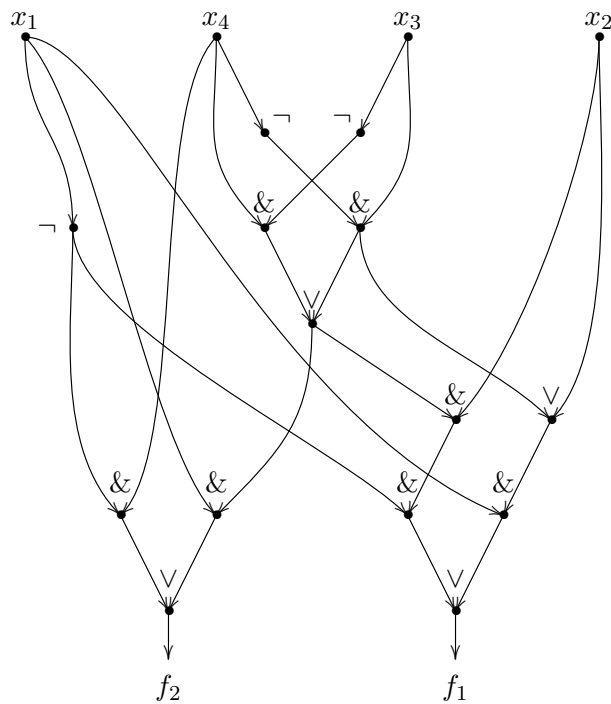


Рис. 4.5: СФЭ для системы ФАЛ  $F$ , построенная методом каскадов

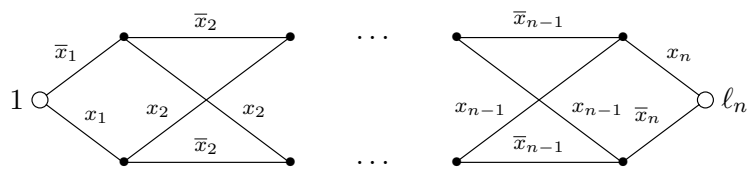


Рис. 4.6: схема Кардо для линейной функции  $l_n$

Кардо [32], показанная на рис. 4.6. Заметим, что эта КС имеет сложность  $(4n - 4)$  и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$ , по методу каскадов имеет сложность  $(7n - 9)$  и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой  $\Sigma_n^\oplus$  сложности  $(4n - 4)$ , показанной на рис. 2.2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ  $\bar{\ell}_n$  (см. лемму 2.3).

При построении по методу каскадов  $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики  $\vec{Q}_n$ , мы получим контактное дерево порядка  $n$ , показанное на рис. 1.1. Как будет показано далее это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный дизъюнктивный дешифратор порядка  $n$  и сложности не больше, чем  $2^{n+2} - 6$ , контактный универсальный многополюсник порядка  $n$  и сложности не больше, чем  $2 \cdot 2^{2^n}$ , а также контактный мультиплексор порядка  $n$  и сложности  $3 \cdot 2^n - 2$ , показанный на рис. 2.1 (см. лемму 2.3). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка  $n$ , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка  $2^n$  от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем  $2^{2^n+1}$ . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним леммы 1.3 и 2.3 следующим утверждением.

**Лемма 4.2.** *Для любого натурального  $n$  и  $\sigma \in B$  выполня-*

ются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [33, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$ .

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра  $q$ ,  $1 \leq q \leq n$ , и построении схемы  $\Sigma_f$ , реализующей произвольную ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  на основе ее разложения по части переменных:

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (4.5)$$

где  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$  при всех  $\sigma''$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ . При этом схема  $\Sigma_f$  представляет собой суперпозицию вида  $\Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  — мультиплексор порядка  $(n - q)$  от адресных БП  $x''$ , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника  $\Sigma'$  порядка  $q$  от БП  $x'$  в соответствии с (4.5).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  указанным выше способом КС (СФЭ в базисе  $B_0$ )  $\Sigma_f$ , где  $\Sigma''$  —  $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка  $(n - q)$  (соответственно формула  $\mathcal{F}_{n-q}$  из леммы 2.3), а  $\Sigma'$  — универсальный многополюсник из леммы 4.2 (соответственно леммы 1.3). Корректность построенной суперпозиции, т.е. реализация схемой  $\Sigma_f$  ФАЛ  $f$  в случае СФЭ очевидна, а в случае КС обеспечивается тем, что её можно представить в виде результата многократной операции присоединения

двух противоположенных контактов, корректность которой была отмечена выше (см. рис. 4.1). Для сложности полученной схемы  $\Sigma_f$  будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$ , и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** *Для функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$  выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

## §5 Нижние мощностные оценки функции Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для функций из специальных классов

Установим теперь ряд нижних оценок для введенных в §1 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [33, 14], который основан на том, что число ФАЛ от БП  $x_1, \dots, x_n$  не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента  $n$ .

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из рассмотренных в главе 2 классов схем,  $\Psi$  — введенный там функционал сложности, а  $\Psi(n)$  — функция Шеннона для класса  $\mathcal{U}$  относительно  $\Psi$ . Обозначим через  $\mathcal{U}(\Psi, n)$  множество тех схем  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}$ , которые реализуют



ют одну ФАЛ из  $P_2(n)$  и для которых  $\Psi(\Sigma) \leq \Psi$ . Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(n), n)\| = 2^{2^n}. \quad (5.1)$$

Заметим также, что если для некоторого натурального  $n$  и действительных  $\widehat{\Psi}$ ,  $\delta$ , где  $0 < \delta < 1$ , выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}(\widehat{\Psi}, n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то } \Psi(f) \geq \widehat{\Psi} \quad (5.2)$$

для не менее чем  $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$  ФАЛ  $f$  из  $P_2(n)$ .

Верхние оценки величины  $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$ , установленные в главе 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (5.1)–(5.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. леммы 4.3, 4.2, 6.2, 6.3 из главы 2) для любых натуральных  $n$  и  $L$  справедливы неравенства:

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L+n))^{L+1}, \quad (5.3)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}, \quad (5.4)$$

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L, \quad (5.5)$$

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L, \quad (5.6)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[L, n]\| \leq (8n)^{2^D}. \quad (5.7)$$

**Лемма 5.1.** *Для положительных действительных чисел  $a$ ,  $y$ ,  $q$  из неравенств*

$$a \log q > 1, \quad (ay)^y \geq q, \quad (5.8)$$

*следует неравенство*

$$y \geq \frac{\log q}{\log(a \log q)} \left( 1 + \frac{\log \log(a \log q)}{\log(ae \log q)} \right), \quad (5.9)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов, а из неравенств  $a > 1$ ,  $a^y \geq q$  — неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\log a}. \quad (5.10)$$

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда  $a = 1$  и  $\log q > 1$ . В этом случае неравенство (5.9) следует из того, что левая часть (5.8) монотонно возрастает по  $y$ , и для

$$y' = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\log \log \log q}{\log (\varepsilon \log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y' \log y' &= \\ &= (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q} (\log \log q - \log \log \log q + \log e \ln (1 + \varepsilon)) \leq \\ &\leq \log q (1 + \varepsilon) \left( 1 - \frac{\log \log \log q}{\log \log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log \log q} \right) = \\ &= \log q (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) = \log q (1 - \varepsilon^2) \leq \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае  $a > 0$  неравенство (5.8) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geq q^a,$$

и поэтому неравенство (5.9) получается из неравенства  $y \geq y'$  в результате замены  $y$  на  $ay$  и  $\log q$  на  $a \log q$ , если выполнено условие  $a \log q > 1$ .

Неравенство (5.10) в случае  $a > 1$  получается в результате логарифмирования неравенства  $a^y \geq q$  и деления обеих частей полученного неравенства на  $\log a$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 5.1.** Для некоторых последовательностей  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$ , где  $i = 1, \dots, 5$  и  $n = 1, 2, \dots$ , таких, что  $\varepsilon_i(n) \geq 0$  при  $n \geq n_0$  и  $\varepsilon_i(n)$  стремится к 0 при  $n$  стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства

$$L^C(f) \geq (1 + \varepsilon_1(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.11)$$

$$L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon_2(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (5.12)$$

$$L^K(f) \geq (1 - \varepsilon_3(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.13)$$

$$L^\pi(f) \geq (1 - \varepsilon_4(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (5.14)$$

$$D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_5(n). \quad (5.15)$$

*Доказательство.* Неравенства (5.11)–(5.14) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем  $\mathcal{U}$  с функционалом сложности  $L$  неравенства (5.3)–(5.6) на основе мощностного неравенства (5.2), где  $\delta = 1/n$  с использованием леммы 5.1, где  $q = 2^{2^n}/n$ , и

- 1)  $a = 8$ ,  $y = L^C(n) + n$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^C$ ;
- 2)  $a = 8n$ ,  $y = L^\Phi(n) + 1$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\Phi$ ;
- 3)  $a = 8n$ ,  $y = L^K(n)$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^K$ ;
- 4)  $a = 12n$ ,  $y = L^\pi(n)$ , если  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\pi$ .

Действительно, подставляя указанные значения в (5.9) по-

лучим, что доля тех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , для которых

$$\begin{aligned} 1) L^C(f) &\geq \frac{2^n}{n+3} \left( 1 + \frac{\log(n+3) - o(1)}{n+5} \right) - n \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{\log n - 3 - o(1)}{n} \right); \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$2) L^\Phi(f) \geq \frac{2^n - \log n}{\log n + 3} - 1 \geq \frac{2^n}{\log n} \left( 1 - \frac{3 + o(1)}{\log n} \right); \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} 3) L^K(f) &\geq \frac{2^n}{n+3+\log n} \left( 1 + \frac{\log(n+3+\log n) - o(1)}{n+5+\log n} \right) \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left( 1 - \frac{3 + o(1)}{n} \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

не меньше, чем  $(1 - 1/n)$ . Следовательно, неравенство (5.11) ((5.12), (5.13)) будет справедливо для достаточно больших  $n$  при  $\varepsilon_1(n) = \frac{\log n - 4}{n}$  (соответственно  $\varepsilon_2(n) = \frac{4}{\log n}$ ,  $\varepsilon_3(n) = \frac{4}{n}$ ).

Аналогичным образом устанавливается справедливость (5.14) и (5.15) при  $\varepsilon_4(n) = \frac{6}{\log n} = \varepsilon_5(n)$ .

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} D(n) &\geq n - \log \log n - o(1), \\ L^C(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \\ L^K(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\pi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}. \end{aligned}$$

Мощностные соображения можно использовать при получении нижних оценок для функций Шеннона, связанных с реализацией ФАЛ из класса  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(1), \mathcal{Q}(2), \dots, \mathcal{Q}(n), \dots$ , где

$$\mathcal{Q} \subseteq P_2 \text{ и } \mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n) \neq \emptyset, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из рассмотренных в главе 2 классов схем,  $\Psi$  — введенный там функционал сложности, а  $\Psi(\mathcal{Q}(n))$  — функция Шеннона (для класса схем  $\mathcal{U}$  относительно функционала сложности  $\Psi$ ), связанная с классом ФАЛ  $\mathcal{Q}$ , то есть

$$\Psi(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} \Psi(f).$$

Следующее «мощностное» неравенство обобщает равенство (5.1) и вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)\| \geq |\mathcal{Q}(n)|. \quad (5.19)$$

Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона  $\Psi(\mathcal{Q}(n))$  на основе известной верхней оценки величины  $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$ .

Рассмотрим, в частности, нижние мощностные оценки для функций  $L^C(\mathcal{Q}(n))$  и  $L^K(\mathcal{Q}(n))$ , то есть функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из класса  $\mathcal{Q}$  схемами из классов  $\mathcal{U}^C$  и  $\mathcal{U}^K$  соответственно. На основе мощностных соображений (см. (5.19)) аналогично тому, как это было сделано в теореме 5.1 для случая  $\mathcal{Q} = P_2$ , доказывается следующее утверждение.

**Лемма 5.2.** *Для класса ФАЛ  $\mathcal{Q}$  такого, что  $n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right)$  ( $\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|)$ ), выполняются следующие асимптотические неравенства*

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}, \quad (5.20)$$

$$\text{(соответственно } L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\text{)}. \quad (5.21)$$

Пусть, например, класс  $\mathcal{Q}$  состоит из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП. Легко видеть, что при этом

$|\mathcal{Q}(n)| = 2^{\frac{3}{4}2^n}$ , так как  $f \in \mathcal{Q}(n)$  тогда и только тогда, когда вторая и третья четверти столбца значений  $\tilde{\alpha}_f$  совпадают. Следовательно, в силу леммы 5.2, отсюда вытекает, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}. \quad (5.22)$$

**§6 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе  $\{\&, \vee, \neg\}$**

Рассмотрим метод синтеза схем из класса  $\mathcal{U}^C$ , который был предложен О.Б. Лупановым [14] и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона  $L^C(n)$ . Этот метод, как и метод Шеннона (см. §4), основан на представлении реализуемой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , в виде (4.5) и построении искомой СФЭ  $\Sigma_f$ , реализующей ФАЛ  $f$ , как суперпозиции схем вида  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ . При этом схема  $\Sigma''$  по-прежнему является мультиплексором порядка  $(n - q)$  от адресных БП  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ , а схема  $\Sigma'$  реализует все ФАЛ вида  $f_{\sigma''}(x')$ , где  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ , и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ . Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$  берется не с выхода универсального многополюсника от БП  $x'$ , а реализуется на выходе  $\Sigma'$  как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества  $G$ ,  $G \subseteq P_2(q)$ , реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы  $\Sigma'$ .

Множество ФАЛ  $G$ ,  $G \subseteq P_2(m)$ , называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка  $m$  и ранга  $p$* , если любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p,$$

где  $g_i \in G$  при всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Пусть  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  — разбиение куба  $B^m$ , и пусть для всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , ФАЛ  $\psi_i(x_1, \dots, x_m)$  — характеристическая ФАЛ множества  $\pi_i$ , а  $G^{(i)}$  — множество всех тех ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , которые обращаются в 0 вне  $\pi_i$ . Заметим, что множество ФАЛ  $G$  вида

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка  $m$  и ранга  $p$ . Действительно, любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p, \quad (6.1)$$

где  $g_i = \psi_i g$  и, следовательно,  $g_i \in G^{(i)}$  для всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Заметим также, что мощность множества  $G^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , равна  $2^{s_i}$ , где  $s_i = |\pi_i|$ , и что множество  $G^{(i)} \cap G^{(j)}$  состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если  $1 \leq i < j \leq p$ . Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{s_i} \leq p2^s,$$

где

$$s = \max_{1 \leq i \leq p} s_i.$$

Указанное ДУМ  $G$  будем называть ДУМ, *связанным с разбиением  $\Pi$* . Компоненты разбиения  $\Pi$  будем при этом называть *полосами* ДУМ  $G$ , а ФАЛ  $\psi_1 = \chi_{\delta_1}, \dots, \psi_p = \chi_{\delta_p}$  — его *характеристическими* ФАЛ. Заметим, что характеристические ФАЛ попарно ортогональны, то есть одновременно в 1 не обращаются, и принадлежат  $G$ . Заметим также,

	$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1} \ x_m$	$\mathfrak{g}_1 \ \mathfrak{g}_2 \ \dots \ \mathfrak{g}_{2^s}$	$\mathfrak{g}_{2^s+1} \ \dots \ \mathfrak{g}_{2^{s+1}-1}$	$\dots$	$\mathfrak{g}_{(p-1)(2^s-1)+2} \ \dots \ \mathfrak{g}_\lambda$	
$\pi_1$	0 0 ... 0 0	0 1 ... 1	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	$s=s_1$
	0 0 ... 0 1	0 0 ... 1	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	0 0 ... 1	0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
$\pi_2$	$\dots$	0 0 ... 0	1 ... 1	$\dots$	0 ... 0	$s=s_2$
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 1	$\dots$	0 ... 0	
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 1	$\dots$	0 ... 0	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$\pi_{p-1}$	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	$s=s_{p-1}$
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
$\pi_p$	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	1 ... 1	$s_p \leq s$
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 1	
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
		$\leftarrow 2^s \rightarrow$	$\leftarrow 2^s - 1 \rightarrow$	$\leftarrow 2^s p - 1 \rightarrow$		

Рис. 6.1: к определению дизъюнктивно-универсального множества

что представление (6.1) в случае рассматриваемого ДУМ  $G$  равносильно представлению:

$$g = \psi_1 g_1 \vee \psi_2 g_2 \vee \dots \vee \psi_p g_p \quad (6.2)$$

Будем считать *стандартным* ДУМ *порядка*  $m$  и *высоты*  $s$ , где

$$s \leq 2^m, \quad (6.3)$$



ДУМ ранга  $p$ ,  $p = \lceil 2^m/s \rceil$ , связанное с разбиением  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  куба  $B^m$  на последовательные отрезки, для которого номер любого набора из множества  $\pi_i$  меньше номера любого набора из множества  $\pi_j$ , если  $i < j$ , и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s, \\ s_p = 2^m - (p-1)s \leq s. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таблица значений ФАЛ ДУМ  $G$  приведена на рис. 6.1.

Из проведенных построений и отмеченных выше свойств стандартного ДУМ вытекает справедливость следующего утверждения.

**Лемма 6.1.** *Для любых натуральных  $p$ ,  $m$  и  $s$ , где  $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$ , существует стандартное ДУМ  $G$  порядка  $m$  и высоты  $s$ , которое является ДУМ ранга  $p$  и для которого:*

- 1)  $\lambda = |G| \leq p2^s$ ;
- 2) система из  $p$  характеристических ФАЛ  $\psi_1, \dots, \psi_p$  ДУМ  $G$  обладает тем свойством, что для любой ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , и соответствующих ФАЛ  $g_1, \dots, g_p$  из  $G$  справедливо не только представление (6.1), но и представление (6.2).

**Теорема 6.1.** *Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая ее СФЭ  $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ , такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (6.5)$$

*Доказательство.* Пусть  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$  для всех  $\sigma''$  из  $B^{n-q}$ . Пусть, далее,  $\Sigma''$  — мультиплексор порядка  $(n-q)$  от адресных БП  $x''$  и информационных БП  $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ , который построен в соответствии с леммой 2.3, представляет собой формулу  $\mathcal{F}_{n-q}$  и реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_{n-q}(x'', y)$ .

Пусть  $s$  — некоторый параметр, удовлетворяющий (6.3), а  $G$  — стандартное ДУМ порядка  $m = q$  и высоты  $s$ , удовлетворяющее требованиям леммы 6.1. Обозначим через  $\Sigma_G$  СФЭ, которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}$  и представляет собой объединение схем, построенных для каждой из них в соответствии с леммой 1.2. Заметим, что, в силу леммы 2.3, (1.3) и леммы 6.1, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma'') &\leq 4 \cdot 2^{n-q}, \\ L(\Sigma_G) &\leq 3p2^{s+q}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Схема  $\Sigma'$  содержит СФЭ  $\Sigma_G$  в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$ , где  $\sigma'' \in B^{n-q}$ , на одном из своих выходов как ФАЛ  $g(x')$  вида (6.1) с помощью СФЭ из  $(p-1)$  ФЭ  $\vee$ , входы которой присоединены к соответствующим выходам  $\Sigma_G$ . Искомая СФЭ  $\Sigma_f$  имеет вид  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$  и реализует ФАЛ  $f$  в соответствии с разложением (4.5). Для нее, в силу (6.6), будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq \\ &\leq 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}, \end{aligned}$$

из которых, выбрав значения параметров

$$\begin{aligned} s &= \lceil n - 5 \log n \rceil, \\ m = q &= \lceil 2 \log n \rceil, \end{aligned}$$

удовлетворяющие (6.3), в соответствии с леммой 6.1 получим

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq \frac{2^n}{n - 5 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Из (6.5) с учётом следствия из теоремы 5.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Отметим, в заключение, что в соответствии с (6.5) и теоремой 5.1 сложность  $L^C(f)$  для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , асимптотически равна функции Шеннона  $L^C(n)$ , то есть сложности самой сложной ФАЛ из  $P_2(n)$ . Тем самым, в отличие от класса ДНФ (см. §7 главы 1), в классе схем  $\mathcal{U}^C$  имеет место т. н. эффект Шеннона — асимптотическое равенство сложности почти всех ФАЛ и сложности самой сложной ФАЛ от заданного числа БП, стремящегося к бесконечности.

## Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

- // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.
- [18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.
- [19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [20] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [26] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

- 
- [28] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [29] Яблонский С. В. Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [30] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [31] Яблонский С. В. Эквивалентные преобразования управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [32] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [33] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [34] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.