

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Вероятностные методы в комбинаторике

2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в магистратуре.

3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». Направленность (профиль) «Математические методы обработки информации и принятия решений». Образовательная программа «Дискретные структуры и алгоритмы».

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в обязательную часть магистерской образовательной программы «Дискретные структуры и алгоритмы», изучается во 2-м семестре.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
способность применять при решении теоретических и практических задач графы и их свойства, разрабатывать графовые модели для теоретических и прикладных задач, применять полученные знания в области теории графов для решения задач в построенных моделях (СПК-22); способность и умение доказывать оценки числа объектов определенного вида, знать и уметь	З1 (СПК-22,23) Знать: свойства графов и других комбинаторных объектов, методы получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методы доказательства существования хотя бы одного объекта с заданными свойствами), задачи перечисления дискретных объектов различного вида: кодов, графов, функций специального вида

применять методы получения их верхних и нижних оценок, а также их асимптотик на основе знания задач перечисления дискретных объектов различного вида: кодов, графов, функций специального вида (СПК-23)	У1 (СПК-22,23) Уметь применять при решении теоретических и практических задач графы и их свойства; разрабатывать графовые модели для теоретических и прикладных задач; применять полученные знания в области теории графов для решения задач в построенных моделях; доказывать оценки числа объектов определенного вида (в частности, доказывать существование хотя бы одного объекта с заданными свойствами), применять методы получения их верхних и нижних оценок, а также их асимптотик В1 (СПК-22,23) Владеть навыками применения при решении теоретических и практических задач графов и их свойств; навыками применения методов получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методами доказательства существования объектов с заданными свойствами), а также их асимптотик на основе знания задач перечисления дискретных объектов различного вида
--	--

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы, всего 72 часа.

38 часов составляет контактная работа с преподавателем – 32 часа занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 2 часа групповых консультаций, 4 часа промежуточной аттестации.

34 часа составляет самостоятельная работа учащегося.

7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по дискретной математике, основам кибернетики, линейной алгебре, математическому анализу, теории вероятностей и комбинаторике в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В процессе обучения применяются слайды лекций курса.

9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Аннотация. Курс является продолжением общих курсов по дискретной математике, основам кибернетики, математическому анализу и теории вероятностей, читаемых в бакалавриате. Также крайне желательно, чтобы студенты обладали знаниями и умениями, которые дают курсы «Избранные вопросы дискретной математики» (обязательный курс для студентов 318 группы) и «Графы и их применения» (обязательный курс для студентов 518/1 группы, 1 семестр магистратуры).

Вероятностные методы являются мощным инструментом для решения многих задач дискретной математики. С помощью них можно красиво (но не конструктивно) доказать, что объект с некоторыми заданными свойствами существует. Для этого подбирается подходящее вероятностное пространство объектов, а затем показывается, что указанные свойства выполняются для случайно выбранного элемента этого пространства с положительной вероятностью. Кроме того, вычисляя вторые моменты, другими вероятностными методами можно доказывать, что некоторые свойства выполняются для почти всех объектов данного пространства.

Курс содержит подробные описания известных вероятностных методов. Теоретические идеи иллюстрируются примерами из различных областей комбинаторики (теория множеств, теория графов и гиперграфов, комбинаторная теория чисел, комбинаторная геометрия и другие), где эти методы хорошо работают. Многие из примеров давно стали классическими и являются своего рода «жемчужинами» математической науки.

Abstract. The course is a continuation of general courses in discrete mathematics, basics of cybernetics, mathematical analysis and probability theory, read in undergraduate. It is also highly desirable that students have the knowledge and skills that provide the courses “Selected Questions of Discrete Mathematics” (compulsory course for students of group 318) and “Graphs and their applications” (compulsory course for students of 518/1 groups, 1 master's semester).

Probabilistic methods are a powerful tool for solving many problems of discrete mathematics. Using them you can beautifully (but not constructively) prove that an object with some given properties exists. For this, a suitable probabilistic space of objects must be selected, and then we must show that the indicated properties are fulfilled for a randomly selected element of this space with a positive probability. In addition, by calculating the second moments, other probabilistic methods can be used to prove that some properties are fulfilled for almost all objects of a given space.

Detailed descriptions of known probabilistic methods are given. Theoretical ideas are illustrated by examples from different areas of combinatorics (set theory, theory of graphs and hypergraphs, combinatorial number theory, combinatorial geometry, and others), where these methods work well. Many of the examples have become classical long ago and are a kind of "pearls" of mathematical science.

Содержание курса

Вероятностный метод как инструмент для решения задач дискретной математики. Идея метода, примеры его применения в теории графов (теорема Эрдёша-Мозера о транзитивном подтурнире, диагональные числа Рамсея, существование турнира со свойством S_k , теорема о мощности доминирующего множества), в теории гиперграфов (теорема об однородных гиперграфах, обладающих свойством B), в комбинаторной теории чисел (теорема о подмножествах, свободных от сумм) и в теории множеств (теорема о мощности (k,l) -системы, пары с пустым пересечением, пересекающиеся семейства множеств). Теорема Эрдёша-Ко-Радо.

Линейность математического ожидания случайной величины. Нижняя оценка числа гамильтоновых путей в турнире. Теорема о двудольном подграфе. Теорема о числе монохроматических клик. Теорема о числе монохроматических двудольных подграфов. Задачи о балансировке векторов и о разбалансировке лампочек. Применение «жадных» алгоритмов как альтернатива вероятностному методу.

Метод малых вариаций. Теория Рамсея. Нижние оценки для диагональных чисел Рамсея. Недиагональные числа Рамсея. Нижняя оценка мощности независимого множества в графе. Решение некоторых задач комбинаторной геометрии с помощью вероятностных методов (нижние оценки чисел $T(S)$ и $T(n)$. Задача об эффективной упаковке). Идея перекраски на примере задачи о гиперграфах, обладающих свойством B . Идея помещения случайных процессов в рамки непрерывного времени. Иллюстрация работы этой идеи для решения задачи о гиперграфах, обладающих свойством B , и задачи о случайных упорядочениях. Большой охват и большое хроматическое число.

Неравенство Чебышёва, его неулучшаемость. Применение метода второго момента к решению некоторых задач из теории чисел (распределение простых чисел). Модели случайных графов. Определение пороговой функции. Пороговая функция для свойства «граф свободен от треугольников». Сбалансированные и строго сбалансированные графы. Наличие заданного сбалансированного подграфа. Максимальный размер клики. Различные суммы.

Локальная лемма Ловаса (общий случай и симметричный случай). Свойство B и разноцветные множества действительных чисел. Более сильные нижние оценки для диагональных чисел Рамсея. Латинские трансверсали. Наличие в орграфе ориентированного простого цикла длины, кратной k .

Теорема Каро и Уэя. Теорема Турана.

Теорема Вейерштрасса о приближении.

Локальная раскраска. Вершинно-транзитивные графы. Лемма Чебышёва. Блуждания в вершинно-транзитивных графах.

Сложность схем. Схемы ограниченной глубины. Нижняя оценка глубины схемы из функциональных элементов для счётчика чётности. Формулы. Нетривиальная нижняя оценка сложности счётчика чётности в классе формул. Максимальные антицепи. Теорема Шпернера.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы						Самостоятельная работа учащегося, часы		
		из них						из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	Всего
Вероятностный метод как инструмент для решения задач дискретной математики. Идея метода, примеры его применения в теории графов (теорема Эрдёша-Мозера о транзитивном подтурнире, диагональные числа Рамсея, существование турнира со свойством S_k , теорема	46	32	-	-	-	-	32	14	-	14

о мощности доминирующего множества), в теории гиперграфов (теорема об однородных гиперграфах, обладающих свойством В), в комбинаторной теории чисел (теорема о подмножествах, свободных от сумм) и в теории множеств (теорема о мощности (k,l)-системы, пары с пустым пересечением, пересекающиеся семейства множеств). Теорема Эрдёша-Ко-Радо. Линейность математического ожидания случайной величины. Нижняя оценка числа гамильтоновых путей в турнире. Теорема о двудольном подграфе. Теорема о числе монохроматических клик. Теорема о числе монохроматических двудольных подграфов. Задачи о балансировке векторов и о разбалансировке лампочек. Применение «жадных» алгоритмов как альтернатива вероятност-										
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ному методу. Метод малых вариаций. Теория Рамсея. Нижние оценки для диагональных чисел Рамсея. Недиагональные чисел Рамсея. Нижняя оценка мощности независимого множества в графе. Решение некоторых задач комбинаторной геометрии с помощью вероятностных методов (нижние оценки чисел $T(S)$ и $T(n)$. Задача об эффективной упаковке). Идея перекраски на примере задачи о гиперграфах, обладающих свойством В. Идея помещения случайных процессов в рамки непрерывного времени. Иллюстрация работы этой идеи для решения задачи о гиперграфах, обладающих свойством В, и задачи о случайных упорядочениях. Большой охват и большое хроматическое число. Неравенство Чебышёва, его неулучшаемость.										
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Применение метода второго момента к решению некоторых задач из теории чисел (распределение простых чисел). Модели случайных графов. Определение пороговой функции. Пороговая функция для свойства «граф свободен от треугольников». Сбалансированные и строго сбалансированные графы. Наличие заданного сбалансированного подграфа. Максимальный размер клики. Различные суммы. Локальная лемма Ловаса (общий случай и симметричный случай). Свойство В и разноцветные множества действительных чисел. Более сильные нижние оценки для диагональных чисел Рамсея. Латинские трансверсали. Наличие в орграфе ориентированного простого цикла длины, кратной k. Теорема Каро и Уэя. Тео-										
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

рема Турана. Теорема Вейерштрасса о приближении. Локальная раскраска. Вершинно-транзитивные графы. Лемма Чебышёва. Блуждания в вершинно-транзитивных графах. Сложность схем. Схемы ограниченной глубины. Нижняя оценка глубины схемы из функциональных элементов для счётчика чётности. Формулы. Нетривиальная нижняя оценка сложности счётчика чётности в классе формул. Максимальные антицепи. Теорема Шпернера.										
Промежуточная аттестация – экзамен	26	-	-	2	-	4	6	20	-	20
Итого	72	38						34		

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, решению задач и подготовки к экзамену.

11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная учебно-методическая литература

- 1) Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
- 2) Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
- 3) Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
- 4) Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М.: ФИМА, МЦНМО, 2010.
- 5) Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.
- 6) Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982.
- 7) Райгородский А.М. Вероятность и алгебра в комбинаторике. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2015.
- 8) Харари Ф. Теория графов. 4-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009.
- 9) Эрдёш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.
- 10) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. 6-е изд. М.: Высшая школа, 2008.

Дополнительная учебно-методическая литература

- 1) Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. 2-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
- 2) Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 8-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2005.
- 3) Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т.1, под ред. С.В.Яблонского и О.Б.Лупанова, М.: Наука, 1974.
- 4) Коршунов А.Д. Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и рёбер // УМН. 1985. Т.40, вып. 1. С.107-173.
- 5) Леонтьев В.К. Избранные задачи комбинаторного анализа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.
- 6) Оре О. Теория графов. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009.
- 7) Райгородский А.М., Шабанов Д.А. Задача Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов, её обобщения и смежные проблемы // УМН. 2011. Т.66, вып. 5. С.109-182.
- 8) Райгородский А.М. Модели случайных графов. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2016.
- 9) Райгородский А.М. Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2009.
- 10) Райгородский А.М. Случайные графы // Математика в задачах. М.: МЦНМО, 2009. С. 312-315.
- 11) Райгородский А.М. Хроматические числа. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2015.

- 12) Татт У. Теория графов. М.: Мир, 1988.
- 13) Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2 томах. М.: Мир, 1984.
- 14) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
- 15) Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008.
- 16) Conlon D. A new upper bound for diagonal Ramsey numbers // Ann. of Math. 2009. V. 170. P. 941-960.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem

Информационные технологии, используемые в процессе обучения

В процессе обучения применяются слайды лекций.

Материально-техническая база

Для преподавания курса требуется класс, оборудованный меловой или маркерной доской, проектором и экраном.

12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛИ

к.ф.-м.н., старший преподаватель Нагорный Александр Степанович (anagorny@list.ru)

Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине «Вероятностные методы в комбинаторике»

Промежуточная аттестация (экзамен) проходит устно. В билете два теоретических вопроса (по разным частям курса) и задача. На подготовку отводится 1 час (60 минут). При подготовке ответа на билет не разрешается пользоваться никакими источниками.

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ из соответствующих карт компетенций					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	Неудовлетворительно	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично	
31 (СПК-22,23) Знать свойства графов и других комбинаторных объектов, методы получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методы доказательства существования хотя бы одного объекта с заданными свойствами), задачи	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о свойствах графов и других комбинаторных объектов, методах получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методах доказательства существования хотя бы одного объекта с заданными свойствами), задачах перечисления дискретных объектов различного вида: кодов, графов, функций специального вида	В целом сформированные, но неполные знания о свойствах графов и других комбинаторных объектов, методах получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методах доказательства существования хотя бы одного объекта с заданными свойствами), задачах перечисления дискретных объектов различного вида: кодов, графов, функций специально-	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о свойствах графов и других комбинаторных объектов, методах получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методах доказательства существования хотя бы одного объекта с заданными свойствами), задачах перечисления дискретных объектов различного вида: кодов,	Сформированные систематические знания о свойствах графов и других комбинаторных объектов, методах получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методах доказательства существования хотя бы одного объекта с заданными свойствами), задачах перечисления дискретных объектов различного вида:	устное собеседование

перечисления дискретных объектов различного вида: кодов, графов, функций специального вида			го вида	графов, функций специального вида	кодов, графов, функций специального вида	
У1 (СПК-22,23) Уметь применять при решении теоретических и практических задач графы и их свойства; разрабатывать графовые модели для теоретических и прикладных задач; применять полученные знания в области теории графов для решения задач в построенных моделях; доказывать оценки числа объектов определенного вида (в частности, доказывать существование хотя бы одного объекта с заданными свойствами), применять методы получения их верхних и нижних оценок, а также их асимптотик	Отсутствие умений	Фрагментарные умения применять при решении теоретических и практических задач графы и их свойства; разрабатывать графовые модели для теоретических и прикладных задач; применять полученные знания в области теории графов для решения задач в построенных моделях; доказывать оценки числа объектов определенного вида (в частности, доказывать существование хотя бы одного объекта с заданными свойствами), применять методы получения их верхних и нижних оценок, а также их асимптотик	В целом сформированное, но не систематическое умение применять при решении теоретических и практических задач графы и их свойства; разрабатывать графовые модели для теоретических и прикладных задач; применять полученные знания в области теории графов для решения задач в построенных моделях; доказывать оценки числа объектов определенного вида (в частности, доказывать существование хотя бы одного объекта с заданными свойствами), применять методы получения их верхних и нижних оценок, а	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение применять при решении теоретических и практических задач графы и их свойства; разрабатывать графовые модели для теоретических и прикладных задач; применять полученные знания в области теории графов для решения задач в построенных моделях; доказывать оценки числа объектов определенного вида (в частности, доказывать существование хотя бы одного объекта с заданными свойствами), применять методы получения их	Сформированное систематическое умение применять при решении теоретических и практических задач графы и их свойства; разрабатывать графовые модели для теоретических и прикладных задач; применять полученные знания в области теории графов для решения задач в построенных моделях; доказывать оценки числа объектов определенного вида (в частности, доказывать существование хотя бы одного объекта с заданными свойствами), применять методы по-	письменное задание (задача)

ществование хотя бы одного объекта с заданными свойствами), применять методы получения их верхних и нижних оценок, а также их асимптотик			также их асимптотик	верхних и нижних оценок, а также их асимптотик	лучения их верхних и нижних оценок, а также их асимптотик	
В1 (СПК-22,23) Владеть навыками применения при решении теоретических и практических задач графов и их свойств; навыками применения методов получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методами доказательства существования объектов с заданными свойствами), а также их асимптотик на основе знания задач перечисления дискретных объектов	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение навыками применения при решении теоретических и практических задач графов и их свойств; навыками применения методов получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методами доказательства существования объектов с заданными свойствами), а также их асимптотик на основе знания задач перечисления дискретных объектов	В целом сформированное, но не систематическое владение навыками применения при решении теоретических и практических задач графов и их свойств; навыками применения методов получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методами доказательства существования объектов с заданными свойствами), а также их асимптотик на основе знания задач перечисления	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы владения навыками применения при решении теоретических и практических задач графов и их свойств; навыками применения методов получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методами доказательства существования объектов с заданными свойствами), а также	Сформированное систематическое владение навыками применения при решении теоретических и практических задач графов и их свойств; навыками применения методов получения верхних и нижних оценок числа объектов определенного вида (в частности, методами доказательства существования объектов с заданными свойствами), а	устное собеседование, письменное задание (задача)

ствами), а также их асимптотик на основе знания задач перечисления дискретных объектов различного вида		различного вида	дискретных объектов различного вида	их асимптотик на основе знания задач перечисления дискретных объектов различного вида	также их асимптотик на основе знания задач перечисления дискретных объектов различного вида	
--	--	-----------------	-------------------------------------	---	---	--

Фонды оценочных средств

Список вопросов для устного собеседования на промежуточной аттестации (на экзамене).

- 1) Вероятностный метод как инструмент для решения задач дискретной математики. Идея метода, примеры его применения в теории графов (теорема Эрдёша-Мозера о транзитивном подтурнире, диагональные числа Рамсея).
- 2) Вероятностный метод как инструмент для решения задач дискретной математики. Идея метода, примеры его применения в теории графов (существование турнира со свойством S_k , теорема о мощности доминирующего множества).
- 3) Вероятностный метод как инструмент для решения задач дискретной математики. Идея метода, примеры его применения в теории гиперграфов (теорема об однородных гиперграфах, обладающих свойством B).
- 4) Вероятностный метод как инструмент для решения задач дискретной математики. Идея метода, примеры его применения в комбинаторной теории чисел (теорема о подмножествах, свободных от сумм) и в теории множеств (теорема о мощности (k,l) -системы).
- 5) Вероятностный метод как инструмент для решения задач дискретной математики. Идея метода, примеры его применения в теории множеств (пары с пустым пересечением, пересекающиеся семейства множеств).
- 6) Теорема Эрдёша-Ко-Радо.
- 7) Линейность математического ожидания случайной величины. Нижняя оценка числа гамильтоновых путей в турнире.
- 8) Линейность математического ожидания случайной величины. Теорема о двудольном подграфе. Теорема о числе монохроматических клик. Теорема о числе монохроматических двудольных подграфов.

- 9) Линейность математического ожидания случайной величины. Задачи о балансировке векторов и о разбалансировке лампочек. Применение «жадных» алгоритмов как альтернатива вероятностному методу.
- 10) Метод малых вариаций. Теория Рамсея. Нижние оценки для диагональных чисел Рамсея.
- 11) Метод малых вариаций. Недиагональные числа Рамсея. Нижняя оценка мощности независимого множества в графе.
- 12) Метод малых вариаций. Решение некоторых задач комбинаторной геометрии (нижние оценки чисел $T(S)$ и $T(n)$, задача об эффективной упаковке) с помощью вероятностных методов.
- 13) Метод малых вариаций. Идея перекраски на примере задачи о гиперграфах, обладающих свойством В.
- 14) Метод малых вариаций. Идея помещения случайных процессов в рамки непрерывного времени. Иллюстрация работы этой идеи для решения задачи о гиперграфах, обладающих свойством В, и задачи о случайных упорядочениях.
- 15) Метод малых вариаций. Большой обхват и большое хроматическое число.
- 16) Неравенство Чебышёва, его неулучшаемость. Применение метода второго момента к решению некоторых задач из теории чисел (распределение простых чисел).
- 17) Модели случайных графов. Определение пороговой функции. Пороговая функция для свойства «граф свободен от треугольников».
- 18) Модели случайных графов. Сбалансированные и строго сбалансированные графы. Наличие заданного сбалансированного подграфа.
- 19) Модели случайных графов. Максимальный размер клики. Различные суммы.
- 20) Локальная лемма Ловаса (общий случай и симметричный случай). Идея доказательства.
- 21) Свойство В и разноцветные множества действительных чисел.
- 22) Более сильные нижние оценки для диагональных чисел Рамсея, получаемые с помощью локальной леммы.
- 23) Латинские трансверсали. Применение локальной леммы Ловаса.
- 24) Наличие в орграфе ориентированного простого цикла длины, кратной k . Применение локальной леммы Ловаса.

- 25) Теорема Каро и Уэя. Теорема Турана.
- 26) Хроматическое число почти всех графов.
- 27) Теорема Вейерштрасса о приближении.
- 28) Локальная раскраска. Вершинно-транзитивные графы. Лемма Чебышёва. Блуждания в вершинно-транзитивных графах.
- 29) Сложность схем. Схемы ограниченной глубины. Нижняя оценка глубины схемы из функциональных элементов для счётчика чётности.
- 30) Сложность схем. Формулы. Нетривиальная нижняя оценка сложности счётчика чётности в классе формул.
- 31) Максимальные антицепи. Теорема Шпернера.

Примерные письменные задания (задачи) для промежуточной аттестации (для экзамена).

- 1) Доказать, что существует граф (гиперграф, турнир, и т.п.) с заданными свойствами.
- 2) Доказать, что существует раскраска вершин (рёбер) графа (гиперграфа) с заданными свойствами.
- 3) Доказать, что существует множество (подмножество, разбиение множества, цепочка подмножеств) с заданными свойствами.
- 4) Доказать, что существует булева функция (формула в некотором базисе, схема в некотором базисе, и т.п.) с заданными свойствами.
- 5) Получить нижнюю (верхнюю) оценку мощности множества с заданными свойствами.
- 6) Получить нижнюю (верхнюю) оценку сложности реализации булевой функции (системы функций) схемами.
- 7) Найти математическое ожидание (дисперсию) некоторой случайной величины в заданном вероятностном пространстве (например, в модели случайных графов).
- 8) Получить некоторую нижнюю (верхнюю) оценку для вероятности заданного события.
- 9) Доказать, что формула определённого вида при заданных условиях является выполнимой.

- 10) Доказать наличие определённого свойства у почти всех объектов из данного класса (векторов длины n , булевых функций от n переменных, графов на n вершинах, и т.п.)
- 11) Найти пороговую функцию для заданного свойства (для множества, для графа и т.п.)

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Оценивание проводится в соответствии с указанными выше критериями.