Лекция 5. Вероятностный метод. Малые вариации

Лектор — Нагорный Александр Степанович
anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Малые вариации. Идея подхода

Идея **вероятностного метода** состоит в следующем. Для того чтобы доказать, что некоторый объект с определёнными свойствами существует, можно определить подходящее вероятностное пространство объектов, а затем показать, что требуемые свойства выполняются в этом пространстве с положительной вероятностью.

Здесь рассматриваются ситуации, в которых «случайный» объект не обладает всеми требуемыми свойствами, и может иметь несколько «изъянов». С помощью небольшой переделки мы удаляем эти изъяны, получая требуемый объект.

Снова диагональные числа Рамсея

Напомним определения.
Обозначим через K_n полный граф на n вершинах.

Определение 1. Числом Рамсея $R(k,l)$ называется наименьшее целое n такое, что при любой раскраске рёбер графа K_n в красный и синий цвета в графе найдётся либо красный подграф K_k, либо синий подграф K_l.

Ранее (лекция 2) была доказана нижняя оценка для диагональных чисел Рамсея:

Следствие из Теоремы 1 [лекция 2]. Для всех $k \geq 3$ верно

$$R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor.$$

Снова диагональные числа Рамсея

Докажем ещё одну нижнюю оценку.

Теорема 1. Для всех $k \geq 3$ и для всех натуральных $n \geq k$ верно

$$R(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную 2-раскраску рёбер графа K_n, полученную раскраской каждого из рёбер независимо в красный или синий цвет (каждый цвет выбирается с равной вероятностью).

Для каждого k-вершинного множества $S \subseteq V$ определим событие

$$A_S = \left\{ \begin{matrix} \text{подграф графа } K_n, \text{ индуцированный } S, \\ \text{является монохроматическим} \end{matrix} \right\}.$$

Снова диагональные числа Рамсея

Доказательство (продолжение). Пусть X_S — индикатор события A_S. Положим $X = \sum X_S$, где сумма берётся по всем S. Из линейности математического ожидания вытекает, что

$$\mathbf{E}[X] = \sum \mathbf{E}[X_S] = m\text{, где } m = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Таким образом, существует 2-раскраска, для которой $X \leq m$. Зафиксируем такую раскраску. Удалим по одной вершине из каждого такого монохроматического k-множества.

Понадобится удалить не более m вершин (возможно, некоторые вершины будут удалены более одного раза).

Снова диагональные числа Рамсея

Доказательство (окончание). Поэтому останется $s \geq n - m$ вершин. Полученная раскраска на этих вершинах не имеет монохроматических k-множеств. ■

Следствие. Для всех $k \geq 3$ верно $R(k,k) > \frac{1}{e}(1 + o(1))k2^{k/2}$.

Упражнение 1. Докажите это следствие самостоятельно.

Замечание. Самая лучшая известная верхняя оценка [2] для $R(k,k)$ имеет вид $R(k,k) < (4 + o(1))^k$.

Недиагональные числа Рамсея

Для недиагональных чисел Рамсея различия между базовым методом и перестройкой иллюстрируются следующими двумя результатами.

Теорема 2. Если существует такое $p \in [0,1]$, что

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1,$$

то $R(k,l) > n$.

Теорема 3. Для любого натурального n и любого $p \in [0,1]$ верно неравенство

$$R(k,l) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

Недиагональные числа Рамсея

Доказательство. В обоих случаях рассматривается случайная 2-раскраска рёбер графа K_n, полученная независимым раскрашиванием каждого ребра в красный или синий цвет, причём красный цвет выбирается с вероятностью p.

Пусть X — сумма числа красных k-множеств и числа синих l—множеств. Из линейности математического ожидания следует, что

$$\mathbf{E}[X] = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

В теореме 2 имеем $\mathbf{E}[X] < 1$, поэтому существует 2-раскраска с $X = 0$.

Недиагональные числа Рамсея

Доказательство (окончание).
В теореме 3 существует 2-раскраска с s «плохими» множествами (красными k–множествами или синими l–множествами), $s \leq \mathbf{E}[X]$. Удалением по одной вершине из каждого плохого множества получаем раскраску для по крайней мере $n - s$ вершин без плохих множеств. ■

Замечание. Получение асимптотик для теорем 2 и 3 — дело весьма сложное. Часто теорема 3 даёт существенное улучшение по сравнению с теоремой 2. Дальнейшие продвижения были получены с использованием локальной леммы Ловаса. Эти оценки проанализированы Спенсером **[3]**.

Независимые множества

Определение 2. Независимым множеством в графе $G = (V, E)$ назовём любое подмножество множества вершин V, в котором все вершины попарно не смежны. Пусть $\alpha(G)$ — максимальный размер независимого множества в графе G. Неравенство $\alpha(G) \geq t$ означает, что графе G существует t вершин без рёбер между ними (т. е., t попарно не смежных вершин).

Сейчас мы коротко и изящно докажем половину знаменитой теоремы Турана.

Независимые множества

Теорема 4 (Туран). Пусть граф $G = (V, E)$ имеет n вершин и $nd/2$ рёбер, $d \geq 1$. Тогда $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

Доказательство. Пусть $S \subseteq V$ — случайное подмножество, определяемое равенством $\Pr[v \in S] = p$, где p будет выбрано позже. Пусть также события $v \in S$ являются взаимно независимыми, $X = |S|$ и Y — число рёбер в индуцированном графе $G|_S$.

Для каждого $e = \{i, j\} \in E$ обозначим через Y_e индикатор события «$i, j \in S$». Тогда $Y = \sum_{e \in E} Y_e$.

Независимые множества

Доказательство (продолжение). Для каждого такого e имеем

$$\mathbf{E}[Y_e] = \Pr[i, j \in S] = p^2.$$

В силу линейности математического ожидания,

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{e \in E} \mathbf{E}[Y_e] = \frac{nd}{2} p^2.$$

Ясно, что $\mathbf{E}[X] = np$. Поэтому вновь в силу линейности математического ожидания,

$$\mathbf{E}[\mathrm{X} - Y] = np - \frac{nd}{2} p^2.$$

Независимые множества

Доказательство (окончание). Чтобы максимизировать эту величину, положим $p = 1/d$ (здесь используется, что $d \geq 1$) и получим

$$\mathbf{E}[X - Y] = \frac{n}{2d}.$$

Поэтому существует множество $S \subseteq V$, для которого разность числа вершин множества S и числа рёбер в S не меньше $\frac{n}{2d}$.

Выберем по вершине в каждом ребре множества S и удалим их. Это приводит к множеству S^* с не менее чем $\frac{n}{2d}$ вершинами. Все рёбра разрушены, поэтому S^* — независимое множество. ■

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, С. 44-47.
2. Graham R. I., Rothschild B. I. and Spenser J. H. (1990) *Ramsey Theory*, second edition, Wiley, New York.
3. Spenser J. H. (1977) Asymptotic lower bounds for Ramsey functions. // *Disc. Math.* **20**: P. 69-76.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!