Лекция 3. Особенности многозначных логик. Замкнутый класс, базис замкнутого класса. Теоремы Янова и Мучника о существовании в многозначных логиках замкнутых классов без базиса и замкнутых классов со счетным базисом.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Лекции по курсу «Дискретные модели», 1-й курс,
магистратура факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Базис замкнутого класса

Пусть A, $A \subseteq P_k$, — замкнутый класс, и $B \subseteq A$.
Множество B называется **базисом** класса A, если
1) $[B] = A$, т.е. система B **полна** в A;
2) для каждой функции $f \in B$ верно $[B \setminus \{f\}] \neq A$, т.е. система B **неизбыточна** в A.

В P_2 каждый базис всего класса P_2 содержит не более 4-х функций.
Э. Пост доказал, что в P_2 каждый замкнутый класс имеет **конечный** базис.

Теорема Янова

Теорема 1 (Ю.И. Янова). *В P_k при $k \geq 3$ существует замкнутый класс, не имеющий базиса.*

Доказательство. Пусть $k \geq 3$. Рассмотрим множество функций $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\} \subseteq P_k$:

$$f_0 = 0,$$

$$f_i(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} 1, & x_1 = \ldots = x_i = 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $A = [\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}]$.

Заметим, что

$$f_i(\ldots, f_j, \ldots) = 0.$$

Поэтому в классе A содержатся только функции, конгруэнтные функциям $f_0, f_1, f_2, \ldots$.

Теорема Янова

Докажем от противного, что замкнутый класс A не имеет базиса.
Пусть $B \subseteq A$ – базис класса A, и f_{n_0} — функция с наименьшим индексом в базисе B.
Возможны два случая.

Теорема Янова

Доказательство.
1. В базисе B есть еще хотя бы одна функция f_{n_1}, где $n_1 > n_0$.
Но тогда противоречие с п. 2 определения базиса, т.к.

$$f_{n_0}(x_1, \dots, x_{n_0}) = f_{n_1}(x_1, \dots, x_{n_0}, x_{n_0}, \dots, x_{n_0}).$$

Теорема Янова

Доказательство.
2. В базисе B есть только функция f_{n_0}. Но тогда противоречие с п. 1 определения базиса, а именно, никакая функция f_n при $n > n_0$ не может быть получена, т.к.

$$f_{n_0}(\ldots, f_{n_0}, \ldots) = 0.$$

Значит, класс A не имеет базиса. $\square$

Теорема Мучника

Теорема 2 (А.А. Мучника). *В P_k при $k \geq 3$ существует замкнутый класс, имеющий счетный базис.*

Доказательство. Пусть $k \geq 3$. Рассмотрим множество функций $\{f_2, f_3, \ldots\} \subseteq P_k$:

$$f_i(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} 1, & x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = 2, x_j = 1, \\ & j = 1, \ldots, i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $A = [\{f_2, f_3, \ldots\}]$.

Докажем, что $B = \{f_2, f_3, \ldots\}$ — базис замкнутого класса A.

Для этого покажем от противного, что для каждого $n_0 = 2, 3, \ldots$ функция f_{n_0} не задается формулой над множеством $B \setminus \{f_{n_0}\}$.

Теорема Мучника

Доказательство.
Пусть

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \ldots, F_{n_1}).$$

Возможны три случая.

Теорема Мучника

Доказательство.
Пусть

$$f_{n_0}(x_1, \dots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \dots, F_{n_1}).$$

1. Среди формул $F_1, \dots, F_{n_1}$ не менее двух, которые не являются переменными:

$$f_{n_0}(x_1, \dots, x_{n_0}) = f_{n_1}(\dots, f_i(\dots), \dots, f_j(\dots), \dots).$$

Но тогда противоречие на наборе $(1, 2, \dots, 2) \in E_k^{n_0}$, т.к.

$$1 = f_{n_0}(1, 2, \dots, 2) \neq f_{n_1}(\dots, \{0, 1\}, \dots, \{0, 1\}, \dots) = 0.$$

Теорема Мучника

Доказательство.
Пусть

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \ldots, F_{n_1}).$$

2. Среди формул $F_1, \ldots, F_{n_1}$ только одна, которая не является переменной. Т.к. $n_1 > 2$, хотя бы одна формула равна переменной, например, x_1:

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(\ldots, x_1, \ldots, f_i(\ldots), \ldots).$$

Но тогда противоречие на наборе $(1, 2, \ldots, 2) \in E_k^{n_0}$, т.к.

$$1 = f_{n_0}(1, 2, \ldots, 2) \neq f_{n_1}(\ldots, 1, \ldots, \{0, 1\}, \ldots) = 0.$$

Теорема Мучника

Доказательство.
Пусть

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \ldots, F_{n_1}).$$

3. Все формулы $F_1, \ldots, F_{n_1}$ являются переменными. Тогда $n_1 > n_0$, и хотя бы одна переменная встречается по меньшей мере дважды, например, x_1:

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(\ldots, x_1, \ldots, x_1, \ldots).$$

Но тогда противоречие на наборе $(1, 2, \ldots, 2) \in E_k^{n_0}$, т.к.

$$1 = f_{n_0}(1, 2, \ldots, 2) \neq f_{n_1}(\ldots, 1, \ldots, 1, \ldots) = 0.$$

Значит, B — неизбыточная система. Другими словами, B — базис замкнутого класса A.

$\square$

Мощность множества замкнутых классов в P_k при $k \geq 3$

Теорема 3. *В P_k при $k \geq 3$ существует континум замкнутых классов.*

Доказательство. Пусть $k \geq 3$. Рассмотрим множество функций $\{f_2, f_3, \dots\} \subseteq P_k$ из доказательства теоремы Мучника. Для каждой бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел

$$\nu = n_1, n_2, \dots,$$

где $n_1 \geq 2$, построим замкнутый класс

$$A_\nu = [\{f_{n_1}, f_{n_2}, \dots\}].$$

Тогда, если последовательности ν_1 и ν_2 различны, то $A_{\nu_1} \neq A_{\nu_2}$.

Значит, построены континум различных замкнутых классов в P_k при $k \geq 3$. □

Э. Пост доказал, что в P_2 существует только **счетное** число замкнутых классов.

Задачи

1. При каждом $k \geq 3$: выделить из полной системы $A \subseteq P_k$ какой-либо базис P_k, если:

1) $A = \{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$;
2) $A = \{0, 1, \ldots, k-1, j_0(x), j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x), x + y, x \cdot y\}$.

2. При каждом $k \geq 3$: выделить из полной системы $A \subseteq P_k$ все возможные базисы P_k, если

1) $A = \{\sim x, \min(x, y), x + y, x \cdot y\}$;
2) $A = \{x - 1, x + 2, \max(x, y), x \dot{-} y\}$.

Конец лекции 3