Лекция 1. Конечнозначные функции. Элементарные k-значные функции. Способы задания k-значных функций: таблицы, формулы, 1-я и 2-я формы, полиномы. Полнота. Теорема о полноте системы Поста. Функция Вебба.

Лектор - Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Конечнозначные функции

Пусть $k \geq 2$ — целое число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.
Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *k-значной*, если

$$f^n : E_k^n \to E_k,$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Множество всех k-значных функций обозначим как P_k, множество всех k-значных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, обозначим как P_k^n.

При $k = 2$ функции называются функциями *алгебры логики*, или *булевыми* функциями, при $k \geq 3$ — *многозначными* функциями.

Аналогично двузначному случаю равенство многозначных функций ($k \geq 3$) рассматривается с точностью до несущественных (фиктивных) переменных.

Существенные и несущественные переменные

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in E_k$, что

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq Const.$$

Переменная x_i является существенной, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной x_i принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.
Несущественные переменные можно удалять и добавлять.

Равенство и конгруэнтность функций

Функции f и g называются **равными**, если конечным числом удалений или добавлений несущественных переменных их можно сделать совпадающими.

Функции f и g называются **конгруэнтными**, если равные им функции осуществляют одинаковые отображения, т.е. отличаются только именами переменных.

Примеры.

1. Функции $f_1(x) = 0$ и $f_2 = 0$ равны.

2. Функции $g(x) = x$ и $h(y) = y$ конгруэнтны.

Применение

Конечнозначные функции применяюся для построения моделей решения прикладных задач, в которых можно выделить исходное множество, состоящее из конечного числа элементов. Не столь широкое применение k-значных функций при $k \geq 3$ по сравнению с двузначными связано, в первую очередь, с физической реализацией вычислительной техники на двузначной основе.
Проводятся исследования, относящиеся к разработке физических схем, построенных на многозначных функциях; существуют промышленные цифровые устройства на многозначной основе.

Таблицы значений

Как можно задавать k-значные функции?

1. Таблицы значений.

Упорядочим все наборы множества E_k^n в *лексико-графическом*, или *алфавитном* порядке (в алфавите $0, 1, \ldots, k-1$), сопоставим каждому набору значение функции на нем.

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
	$\ldots$			
0	$\ldots$	0	$k-1$	$f(0, \ldots, 0, k-1)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	0	$f(k-1, \ldots, k-1, 0)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-2)$
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-1)$

Число k-значных функций

Теорема 1. *Пусть* $k \geq 2$. *При* $n \geq 1$ *верно* $|P_k^n| = k^{k^n}$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^n$.

В ее таблице k^n строк.

В каждой строке вне зависимости от других строк — ее значение на этом наборе из k возможных значений.

Отсюда $|P_k^n| = k^{k^n}$.

$\square$

Элементарные функции

2. Формулы.

Элементарные k-значные функции ($k \geq 3$).

$\mathbf{n = 0}$:

константы $0, 1, \ldots, k-1$.

$\mathbf{n = 1}$:

x	x	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k-1$	0
1	1	2	$k-2$	$k-1$
$\ldots$				
$k-2$	$k-2$	$k-1$	1	2
$k-1$	$k-1$	0	0	1

x — тождественно x;

$\bar{x} = x + 1 \pmod{k}$ — отрицание Поста x;

$\sim x = (k-1) - x$ — отрицание Лукасевича x;

$-x = k - x \pmod{k}$ — минус x.

Элементарные функции

Характеристические функции выделенного значения $J_i(x)$, $j_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x = i, \\ 0, & x \neq i; \end{cases}$$

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

Элементарные функции

n $= 2$:

$x + y (\mathrm{mod}\ k)$, $x - y (\mathrm{mod}\ k)$, $x \cdot y (\mathrm{mod}\ k)$ — сложение, вычитание и умножение по модулю k;

$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases}$ — минимум из x и y;

$\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y, \\ y, & x < y, \end{cases}$ — максимум из x и y;

$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 0, & x < y, \end{cases}$ — усеченная разность;

$x \to y = \begin{cases} k - 1, & x \leq y, \\ (k-1) - (x - y), & x > y, \end{cases}$ — импликация.

обобщения:

$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \ldots, x_n))$;

$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \ldots, x_n))$;

$x^m = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m}$ — степень.

Элементарные функции

Как двузначные функции обобщаются на многозначные функции?

n	P_2	$P_k,\ k \geq 3$	пояснения
$n=0$	$0,\ 1$	$0,\ 1,\ \dots,\ k-1$	константы
$n=1$	x	x	тождественная функция
	$\bar{x}$	$\bar{x},\ \sim x$	отрицание
$n=2$	$x \& y$	$\min(x,y)$	конъюнкция или минимум
	$x \vee y$	$\max(x,y)$	дизъюнкция или максимум
	$x \oplus y$	$x+y \pmod{k}$	сложение по модулю k
	$x \to y$	$x \to y$	импликация

В связи с расширением исходного множества значений появляются элементарные функции, не имеющие явного элементарного прообраза в двузначном случае: $-x$, $J_i(x)$, $j_i(x)$, $x \dot{-} y$.

Формула

Понятия *формулы* и *функции, определяемой формулой*, вводятся аналогично двузначному случаю.
Пусть $A \subseteq P_k$.
Формула над множеством A определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если $f^n \in A$ — n-местная функция и $u_1, \ldots, u_n$ — набор из n произвольных переменных, то выражение $f(u_1, \ldots, u_n)$ — формула.

2. *Индуктивный переход*. Если $F_1, \ldots, F_n$ — уже построенные формулы или переменные и $f^n \in A$ — n-местная функция, то выражение $f(F_1, \ldots, F_n)$ — формула.

3. Других формул нет, т.е. каждая формула построена либо по по базису индукции, либо по индуктивному переходу.

Формулы

Пример. Пусть $A \subseteq P_5$ — множество элементарных функций. Тогда

$F_1 = x^2$	формула по базису индукции для функции $x^2 \in A$ и переменной x;
$F_2 = 3$	формула по базису индукции для функции $3 \in A$;
$F_3 = 3 \cdot x^2$	формула по индуктивному переходу для уже построенных формул F_1, F_2 и функции $x \cdot y \in A$;
$F_4 = \sim (3 \cdot x^2)$	формула по индуктивному переходу для уже построенной формулы F_3 и функции $\sim x \in A$;
	и т.д.

Функция, определяемая формулой

Каждая формула над множеством $A \subseteq P_k$ задает некоторую *k-значную функцию*.

Функция f_F, задаваемая формулой F, определяется по индукции.

1. *Базис индукции*. Если $F = u$, где u — переменная, то $f_F = u$, т.е. функция f_F тождественно равна переменной u.

2. *Индуктивный переход*. Если $F = f(F_1, \ldots, F_n)$, где $F_1, \ldots, F_n$ — формулы или переменные и $f^n \in A$, то $f_F = f(f_{F_1}, \ldots, f_{F_n})$.

Функции, определяемые формулами

Пример. Найдем функцию $f_{F_4}(x) \in P_5$, которая задается формулой F_4:

x	x^2	$3 \cdot x^2$	$\sim (3 \cdot x^2)$
0	0	0	4
1	1	3	1
2	4	2	3
3	4	2	3
4	1	3	1

Функция f_{F_4}, определяемая формулой F_4, записана в самом правом столбце.

Эквивалентные формулы

Формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**, если они определяют равные функции, т.е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны.
Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$

Верны следующие свойства:
1) коммутативность связок $\cdot, +, \min, \max$;
2) ассоциативность связок $\cdot, +, \min, \max$;
3) дистрибутивность умножения относительно сложения:
$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
И многие другие.

Доказательство эквивалентностей

Примеры.

1. Докажем эквивалентность: $-(\bar{x}) = \sim x$.

$$-(\bar{x}) = -(x+1) = (k-1) - x = \sim x.$$

2. Докажем эквивалентность: $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$.

$$\sim \max(\sim x, \sim y) =$$

$$= (k-1) - \begin{cases} (k-1) - x, & (k-1) - x \geq (k-1) - y, \\ (k-1) - y, & (k-1) - x < (k-1) - y, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases} = \min(x, y).$$

1-я форма

Теорема 2 (о 1-й форме). *Пусть $k \geq 2$. Каждая k-значная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой вида:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \max_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min\left(J_{\sigma_1}(x_1), \dots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\right).$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$. Тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) = \max_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} \min\left(J_{\sigma_1}(a_1), \dots, J_{\sigma_n}(a_n), f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\right) =$$

$$= \max(0, \dots, 0, f(a_1, \dots, a_n), 0, \dots, 0) = f(a_1, \dots, a_n).$$

$\square$

1-я форма

Пример.
Пусть $f(x) = \bar{x} \in P_3$:

x	f
0	1
1	2
2	0

Найдем ее 1-ю форму:

$$f(x) = \max(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))) =$$

$$= \max(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), 2), \min(J_2(x), 0)) =$$

$$= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)).$$

2-я форма

Теорема 3 (о 2-й форме) *Пусть $k \geq 2$. Каждая k-значная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой вида:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

2-я форма

Пример. Пусть $g(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$:

x	x^2	$x + x^2$	g
0	0	0	0
1	1	2	3
2	0	2	3
3	1	0	0

Найдем ее 2-ю форму:

$$g(x) = j_0(x) \cdot g(0) + j_1(x) \cdot g(1) + j_2(x) \cdot g(2) + j_3(x) \cdot g(3) =$$

$$= j_0(x) \cdot 0 + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot 0 = 3j_1(x) + 3j_2(x).$$

Моном

Формула вида

$$x_{i_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{s_r},$$

где все переменные попарно различны и $s_1, \ldots, s_r \geq 1$, называется *мономом*.

Число его сомножителей r, $r \geq 1$, называется *рангом*, сумма степеней его сомножителей $s = \sum_{i=1}^{r} s_i$, $s \geq 1$, называется его *степенью*.

По определению будем считать константу 1 мономом ранга $r = 0$ и степени $s = 0$.

Полином

Формула вида

$$c_1K_1 + \ldots + c_lK_l,$$

где K_i — попарно различные мономы и $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ — коэффициенты, $i = 1, \ldots, l$, называется **полиномом по модулю k**.
Число l, $l \geq 1$, слагаемых K_i называется его *длиной*.
По определению будем считать константу 0 (пустым) полиномом по модулю k с длиной $l = 0$.
Примем, что в полином можно добавлять слагаемые с нулевыми коэффициентами. Полученное выражение (формулу) будем также называть полиномом. Будем считать, что такой полином совпадает с полиномом без всех слагаемых с нулевыми коэффициентами.

Полиномы

Теорема 4 (о задании k-значных функций полиномами)
Пусть $k \geq 2$. Каждая k-значная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ задается полиномом по модулю k тогда и только тогда, когда k — простое число.

Полиномы

Доказательство.
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Запишем ее во 2-й форме:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Заметим, что $j_\sigma(x) = j_0(x - \sigma)$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} j_0(x_1 - \sigma_1) \cdot \ldots \cdot j_0(x_n - \sigma_n) \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Полиномы

Доказательство.
1. Если k — простое число, то по малой теореме Ферма $a^{k-1} = 1 (\mathrm{mod}\ k)$ при $1 \leq a \leq k-1$.
Тогда $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$ и

$$f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in E_k^n} (1-(x_1-\sigma_1)^{k-1}) \cdot \ldots \cdot (1-(x_n-\sigma_n)^{k-1}) \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Затем перемножаем скобки по свойствам дистрибутивности, коммутативности и ассоциативности; приводим подобные слагаемые. Получим полином по модулю k для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.
Существование полинома по модулю k для каждой k-значной функции при простых k доказано.

Полиномы

Доказательство.
2. Пусть k — составное число. Тогда $k = k_1 \cdot k_2$, где $k_1 \geq k_2 > 1$. Докажем от противного, что в этом случае функция $j_0(x)$ не задается полиномом по модулю k.

Полиномы

Доказательство.
Пусть функция $j_0(x)$ задается полиномом по модулю k:

$$j_0(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

$c_s, c_{s-1}, \ldots, c_1, c_0 \in E_k$ — коэффициенты, $c_s \neq 0$.
Тогда

$$j_0(0) = c_0 = 1;$$

$$j_0(k_2) = c_s k_2^s + c_{s-1} k_2^{s-1} + \ldots + c_1 k_2 + 1 = 0.$$

Отсюда

$$k_2 \cdot (c_s k_2^{s-1} + c_{s-1} k_2^{s-2} + \ldots + c_1) = k - 1 (\mathrm{mod}\ k).$$

Т.к. число k_2 — делитель числа k, число $k - 1$ обязано делиться на $k_2 > 1$ — противоречие.
Т.е. при составных k никакой полином по модулю k не задает функцию $j_0(x)$. $\square$

Полиномиальные функции

Элементарные функции

$$
\begin{aligned}
&x;\\
&\bar{x} = x + 1;\\
&\sim x = (k-1) - x = (k-1)x + (k-1);\\
&-x = k - x = (k-1)x;\\
&x + y;\\
&x - y = x + (k-1)y;\\
&x \cdot y;\\
&x^m;
\end{aligned}
$$

являются полиномиальными при всех значениях k — и простых, и составных.

Неполиномиальные функции

Элементарные функции

$$
\begin{aligned}
&j_i(x),\ \ i \in E_k;\\
&J_i(x),\ \ i \in E_k;\\
&\max(x, y);\\
&\min(x, y);\\
&x \dot{-} y;\\
&x \to y;
\end{aligned}
$$

являются полиномиальными при простых k и НЕ ЯВЛЯЮТСЯ полиномиальными при всех составных k (будет доказано далее).

Полиномиальные функции

Множество всех k-значных функций, задающихся полиномами по модулю k, обозначается как Pol_k.

Следствие 4.1.
Если k — простое число, то $Pol_k = P_k$;
если k — составное число, то $Pol_k \neq P_k$.

Вопросы:
Как строить полиномы для k-значных функций при простых k?
Как выяснить, задается ли полиномом заданная k-значная функция, если k — составное?

Если k — простое число

Методы построения полиномов k-значных функций при простых k:

1. метод из доказательства теоремы 4 — по 2-й форме;
2. метод *неопределенных коэффициентов*;

Если k — составное число

Если k — составное число, то можно применять метод *неопределенных коэффициентов* для выяснения, задается ли данная k-значная функция полиномом по модулю k.

Если k — составное число

Примеры.

1. Пусть $f(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4$.

Выясним, задается ли функция $f(x) \in P_4$ полиномом по модулю 4 *методом неопределенных коэффициентов*.

Предположим, что функция $f(x)$ задается полиномом по модулю 4.

Сначала построим таблицу степеней x^s:

x	x^2	x^3	x^4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	1

Так как $x^4 = x^2$, степени в полиноме по модулю 4 можно записывать только до третьей.

Если k — составное число

Тогда

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ — неизвестные коэффициенты.
Для определения коэффициентов составим систему уравнений по значениям данной функции $f(x) = J_1(x) + J_3(x) \in P_4$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= d = 0;\\
f(1) &= a + b + c + d = 3;\\
f(2) &= 2c + d = 3;\\
f(3) &= 3a + b + 3c + d = 0.
\end{aligned}$$

Если k — составное число

Из первого и третьего уравнения получаем:

$$2c = 3.$$

Подставляя все возможные значения $c \in E_4$, выясняем, что равенство не выполняется ни при каких значениях $c \in E_4$:

$$2 \cdot 0 = 0;\ 2 \cdot 1 = 1;\ 2 \cdot 2 = 0;\ 2 \cdot 3 = 2.$$

Следовательно, система не имеет решений (по модулю 4), и

$$f(x) = J_1(x) + J_2(x) \notin Pol_4.$$

Если k — составное число

2. Пусть $g(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) \in P_4$.
Аналогично, выясним, задается ли функция $g(x) \in P_4$ полиномом по модулю 4.
Тогда

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ — неизвестные коэффициенты.
Составляем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
g(0) &= d = 0;\\
g(1) &= a + b + c + d = 2;\\
g(2) &= 2c + d = 2;\\
g(3) &= 3a + b + 3c + d = 0.
\end{aligned}$$

Если k — составное число

Из первого и третьего уравнения получаем:

$$2c = 2, \;\; c = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a + b &= 1; \\ 3a + b &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a = 0, \;\; b = 1.$$

Следовательно, функция $g(x)$ задается полиномом по модулю 4, и один из ее полиномов по модулю 4

$$g(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) = x^2 + x \in Pol_4.$$

Операция замыкания

Пусть $A \subseteq P_k$ — множество k-значных функций.

Замыканием множества A называется множество всех функций, задаваемых формулами над множеством A. Обозначение: $[A]$.

Если $A = [A]$, то множество A называется **замкнутым классом**.

Примеры: $\emptyset$, P_k, Pol_k.

Полные системы

Если $[A] = P_k$, то множество A называется **полной системой**.

Примеры.
1. $\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \max(x, y), \min(x, y)\}$ — система 1-й формы.
2. $\{0, 1, \ldots, k-1, j_0(x), j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x), x + y, x \cdot y\}$ — система 2-й формы.
3. $\{0, 1, \ldots, k-1, x + y, x \cdot y\}$ при простых k — система полиномов.

Система Поста

Теорема 5. *Пусть $k \geq 3$. Система Поста $\{\bar{x}, \max(x, y)\}$ является полной системой в P_k.*

Доказательство. Построим формулами на системой Поста все функции из системы 1-й формы.

1. Построение констант.

$\bar{x} = x + 1$; $(x + 1) + 1 = x + 2$; $\ldots$; $(x + (k-1)) + 1 = x$. Тогда

$$\max(x, x+1, x+2, \ldots, x+(k-1)) = k-1.$$

Отсюда $(k-1) + 1 = 0$; $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 2$; $\ldots$; $(k-2) + 1 = k - 1$.

Все константы получены.

Система Поста

Доказательство.
2. Построение $J_i(x)$, $i \in E_k$.
Проверим, что

$$J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t).$$

Если $x = i$, то

$$k - 1 = J_i(i) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (i + t) = 1 + (k - 2) = k - 1.$$

Если $x \neq i$, то

$$0 = J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t) = 1 + (k - 1) = 0.$$

Все $J_i(x)$, $i \in E_k$, получены.

Система Поста

.

Доказательство.
3. Построение $\min(x, y)$.
Проверим, что

$$g_{i,a}(x) = a \cdot j_i(x) = (a+1) + \max(J_i(x), (k-1) - a).$$

Если $x = i$, то

$$a = a \cdot j_i(i) = (a+1) + \max(J_i(i), (k-1) - a) = (a+1) + (k-1) = a.$$

Если $x \neq i$, то

$$0 = a \cdot j_i(x) = (a+1) + \max(J_i(x), (k-1) - a) = (a+1) + (k-1) - a = 0.$$

Система Поста

.

Доказательство.
Тогда получена каждая функция $f(x) \in P_k^1$, так как

$$f(x) = \max(g_{0,f(0)}(x), g_{1,f(1)}(x), \dots, g_{k-1,f(k-1)}(x)).$$

Действительно, для каждого значения $a \in E_k$ верно

$$f(a) = \max(g_{0,f(0)}(a), \dots, g_{a,f(a)}(a), \dots, g_{k-1,f(k-1)}(a)) =$$

$$= \max(0, \dots, 0, f(a), 0, \dots, 0) = f(a).$$

В частности, получена функция $f(x) = \sim x$.
Тогда

$$\min(x, y) = \sim \max(\sim x, \sim y).$$

Функция $\min(x, y)$ получена.
Все функции системы 1-й формы построены формулами над функциями системы Поста. Система Поста — полна. $\square$

Функция Вебба

Следствие 5.1. *Пусть* $k \geq 3$. *Множество, состоящее из одной функции Вебба* $V_k(x, y) = \max(x, y) + 1$, *является полной системой в* P_k.

Доказательство. Построим из функции Вебба функции из системы Поста.

$$\bar{x} = V_k(x, x) = \max(x, x) + 1 = x + 1;$$

$$\max(x, y) = V_k(x, y) + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-1}.$$

$\square$

Неполиномиальность максимума

Следствие 5.2. *Если k — составное число, то* $\max(x, y) \notin Pol_k$.
Доказательство проведем от противного. Пусть
$\max(x, y) \in Pol_k$ при некотором составном k.
Но $\bar{x} = x + 1 \in Pol_k$.
Тогда $\{\bar{x}, \max(x, y)\} \subseteq Pol_k$.
Но система Поста полна в P_k, следовательно, каждая функция
из P_k задается полиномом по модулю k при составном k —
противоречие.
Отсюда, $\max(x, y) \notin Pol_k$.

$\square$

Бесконечные полные системы в P_k

Следствие 5.3. *Из каждой бесконечной полной в P_k системы можно выделить конечную полную подсистему.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq P_k$ — бесконечная полная система.

Т.к. система A — полна, в ней найдутся функции такие $g_1, \dots, g_t$, что функция Вебба $V_k(x, y)$ выражается формулой над ними.

Тогда подсистема $A' = \{g_1, \dots, g_t\}$ — полна в P_k.

□

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. I, гл. 2, стр. 43–50.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. III 1.1, 1.11, 1.12, 2.7, 2.12, 2.22.

Конец лекции