Лекция 4. Графы. Простейшие свойства графов. Связные графы. Деревья. Остовное дерево. Число висячих вершин в остовном дереве.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Лекции по «Дискретным моделям».
Магистратура, 1-й курс,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Определение графа

(**Неориентированным**) **графом** G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена **неупорядоченная** пара вершин, т.е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Петли и кратные ребра

Ребро $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**.

Ребра $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными** ребрами.

Граф, в котором допускаются и петли, и кратные ребра иногда называется **псевдографом**.
Граф без петель, но, возможно, с кратными ребрами называется **мультиграфом**.
Граф без петель и кратных ребер называется **простым**, или **обыкновенным** графом.

Мы будем, как правило, рассматривать простые графы, т.е. графы без петель и кратных ребер. Дальнейшие определения будут вводится, в основном, только для таких графов.

Изоморфизм графов

Два графа (без петель и кратных ребер)

$G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$

называются **изоморфными**, если найдется такое взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, что для любой пары вершин $v, w \in V_1$ верно соотношение:

$(v, w) \in E_1$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

Смежность

Говорят, что ребро $e = (v, w)$ **соединяет** вершины v и w, или **исходит** из вершины v (и из вершины w), или вершины v и w **инцидентны** ребру e.

При этом вершины v и w называются **концами** ребра e, или **смежными** (**соседними**) по ребру e.

Полные графы

Полным графом называется граф, в котором любые две различные вершины смежны;

K_n — полный граф с n вершинами, K_3 — **треугольник**.

Двудольные графы

Двудольным графом называется граф, в котором вершины можно разбить на две части (доли) так, что смежны только вершины из разных долей.

Полный двудольный граф — двудольный граф, в котором смежны любые две вершины из разных долей;

$K_{m,n}$ — полный двудольный граф с долями из m и n вершин.

Степень вершины

Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе (без петель и кратных ребер) $G = (V, E)$ называется число исходящих из нее ребер.

Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в графе G, если $d_G(v) = 1$, то вершина v называется **висячей**, или **концевой** в графе G.

Обозначения: $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ и $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ – соответственно, наименьшая и наибольшая степени вершин в графе G.

Формула Эйлера для степеней вершин

Предложение 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$;
2) *в графе G число вершин, имеющих нечетную степень, четно.*

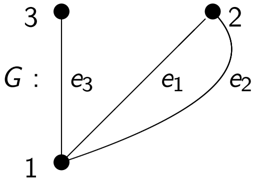
Доказательство.
1. Рассмотрим сумму в левой части равенства. Т.к. любое ребро графа имеет ровно два конца, каждое ребро в этой сумме будет подсчитано ровно два раза. Отсюда получаем выражение в правой части равенства.
2. Свойство непосредственно следует из равенства п. 1.

$\square$

Изображения графов

Для наглядности графы можно изображать: вершинам ставятся в соответствие **точки** (причем разным вершинам сопоставляются различные точки); ребрам сопоставляются **линии**, соединяющие соответствующие вершины (точки) (разным ребрам соответствуют различные линии).

Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (1, 2)$ и $e_3 = (1, 3)$.



Пути в графах

Путем в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m)**-путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{m-1} e_m v_m,$$

в которой $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$ для каждого $j = 1, \ldots, m$.

При этом вершина v_0 называется **началом** пути, вершина v_m называется **концом** пути. Число m ребер пути называется его **длиной**.

Для графов без петель и кратных ребер **путь** однозначно определяется последовательностью вершин $v_0 v_1 v_2 \ldots v_{m-1} v_m$.

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Циклы в графах

Замкнутый путь — путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Свойства путей и цепей

Предложение 2.

Пусть $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) *в графе* G *из любого замкнутого пути нечетной длины* m*,* $m \geq 3$*, можно выделить простой цикл нечетной длины;*
2) *в графе* G *найдутся*
а) *простая цепь с длиной, не меньшей* $\delta(G)$*,*
б) *простой цикл с длиной, не меньшей* $\delta(G) + 1$ *при* $\delta(G) \geq 2$*.*

Свойства путей и цепей

Доказательство.
1. Рассмотрим замкнутый путь P нечетной длины m, $m \geq 3$. Если в нем никакая вершина, кроме последной не повторяется, то он — искомый простой цикл нечетной длины. Пусть некоторая вершина $v \in V$ в нем повторяется, т.е.

$$P = vP_1vP_2v,$$

где P_1, P_2 — непересекающиеся непустые части пути P, на которые его разбивает вершина v. Пусть m_1, m_2 — соответственно длины путей P_1, P_2, причем, $m_1 < m$ и $m_2 < m$. Т.к. $m = m_1 + m_2$ и m нечетное число, либо m_1 — нечетное число, либо m_2 — нечетное число. Повторим рассуждения для нового замкнутого пути с меньшей нечетной длиной. Через конечное число шагов получим искомый простой цикл нечетной длины.

Свойства путей и цепей

Доказательство.
2. а) Рассмотрим произвольную вершину $v_0 \in V$. Положим $P_0 = v_0$ — простая цепь длины 0. Пусть мы уже построили простую цепь $P_i = v_0 v_1 \dots v_i$ длины i.
Если $i = \delta(G)$, то P_i — искомая простая цепь.
Пусть $i < \delta(G)$. Т.к. $d_G(v_i) \geq \delta(G)$, найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, не совпадающая ни с одной из вершин $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Добавим эту вершину v_{i+1} к цепи P_i, т.е. построим простую цепь $P_{i+1} = v_0 v_1 \dots v_i v_{i+1}$ длины $(i+1)$.
Через $\delta(G)$ шагов мы получим искомую простую цепь.

Свойства путей и цепей

Доказательство.
2. б) Пусть мы построили простую цепь $P_m = v_0 v_1 \dots v_m$ длины $m = \delta(G)$. Если найдется такая вершина v_{m+1}, не совпадающая с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_m$, что $(v_m, v_{m+1}) \in E$, то добавим эту вершину v_{m+1} к цепи P_m, т.е. построим простую цепь $P_{m+1} = v_0 v_1 \dots v_m v_{m+1}$ длины $(m+1)$.
Так будем действовать до тех пор, пока не получим такую простую цепь $P_{m'} = v_0 v_1 \dots v_m \dots v_{m'}$ длины m', $m' \geq m$, что все вершины, с которыми связана вершина $v_{m'}$, лежат на цепи $P_{m'}$.
Пусть v_{i_0}, $i_0 < m'$, — вершина с наименьшим номером на цепи $P_{m'}$, с которой связана вершина $v_{m'}$. Тогда искомый простой цикл $C = v_{i_0} \dots v_{m'} v_{i_0}$.

$\square$

Подграфы

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Операции над графами:

Граф $G - e$, где $e \in E$: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Граф $G - v$, где $v \in V$, — граф с множеством вершин $V \setminus \{v\}$ и с множеством ребер E без всех ребер с концами в вершине v.

Граф $G + e$, где $e = (v, w)$, $e \notin E$:
$G + e = (V \cup \{v, w\}, E \cup \{e\})$.

Связность

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для каждой пары вершин $v, w \in V$ в графе G существует (v, w)-путь (а значит, и простая (v, w)-цепь).

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Если G — связный граф, то у графа G одна компонента связности.

Свойства связных графов

Предложение 3. *Пусть $G = (V, E)$ — связный граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) в графе $G_1 = G + e$, где $e = (v, w) \notin E$, $v, w \in V$, найдется цикл;
2) граф $G_2 = G - e$, где ребро e принадлежит циклу, является связным.

Свойства связных графов

Доказательство.
1. Граф G — связный, поэтому в нем найдется (v, w)-путь. Если в этом пути есть повторяющиеся вершины, то выбросим из него части между двумя повторами одной и той же вершины. Так получим простую (v, w)-цепь P в графе G. В графе G_1 простая цепь P также содержится. Тогда $C = vPw(w, v)v$ — искомый цикл в графе G_1.

Свойства связных графов

Доказательство.
2. Пусть ребро e принадлежит циклу C в графе G. Рассмотрим две произвольные вершины v, w в графе G_2. Эти же вершины принадлежат графу G. Граф G — связный, поэтому в графе G найдется (v, w)-путь P. Если путь P не проходит через ребро e, то он содержится и в графе G_2. Если же путь P проходит через ребро e, то заменим в нем это ребро ребрами, принадлежащими оставшейся части цикла C. Получим (v, w)-путь в графе G_2.

$\square$

Число компонет связности

Предложение 4. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер с* p *вершинами,* q *ребрами и* s *компонентами связности. Тогда*

1) $s \geq p - q$;

2) *если в графе* G *отсутствуют циклы, то* $s = p - q$.

Число компонет связности

Доказательство.
1. Рассмотрим переход от графа $G_i = (V, E_i)$ к графу $G_{i+1} = G_i + e$, где $E_i \subseteq E$, $e \in E \setminus E_i$. Пусть в графах G_i, G_{i+1} соответственно s_i, s_{i+1} компонет связности. Тогда если ребро e соединяет вершины из одной компоненты связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i$; и если ребро e соединяет вершины из разных компонент связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому

$$s_{i+1} \geq s_i - 1.$$

Граф G можно получить из графа $G_0 = (V, \emptyset)$ с p компонентнами связности последовательным добавлением всех ребер множества E. Отсюда $s \geq p - q$.
2. Если же в графе G нет циклов, то в предыдущих рассуждениях верно $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s = p - q$.

$\square$

Деревья

Деревом называется связный граф без циклов.

Теорема 1. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф с* p *вершинами и* q *ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) G *— дерево*;
2) G *— связный граф и* $q = p - 1$;
3) G *— граф без циклов и* $q = p - 1$;
4) G *— граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появится цикл*;
5) G *— связный граф, но при удалении любого ребра останется несвязный граф*.

Свойства деревьев

Предложение 5.
1. *Любое дерево с* $p \geq 2$ *вершинами содержит хотя бы две висячие вершины.*
2. *В любом дереве с* p *вершинами содержит* $q = p - 1$ *ребер.*
3. *В любом дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.*
4. *Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то появится ровно один простой цикл.*
5. *Если из дерева удалить ребро, то останется граф с двумя компонентами связности.*

Свойства деревьев

Доказательство.
1. Доказывается от противного, что в дереве найдется хотя бы одна висячая вершина. Затем опять от противного, что в дереве найдется не менее двух висячих вершин.
2. Следует из зависимости между числом вершин, ребер и компонент связности в графе, т.к. в дереве нет циклов.
3. Если какие-то вершины соединены более, чем одной простой цепью, то из объединения двух из этих цепей можно выделить цикл, чего не может быть.
4. Ровно один простой цикл появится, т.к. по свойству 3 эти вершины в исходном дереве соединены ровно одной простой цепью.
5. Следует из свойств связных графов, т.к. в дереве нет циклов.

□

Корневые деревья

Корневым деревом называется пара $(D; v_0)$, где $D = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — выделенная вершина, называемая **корнем**.

При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень.

Остовные деревья

Остовным деревом связного графа G называется его подграф D со всеми вершинами, являющийся деревом.

Предложение 7. *В каждом связном графе* $G = (V, E)$ *найдется остовное дерево.*

Доказательство (1-й способ). Если в графе G нет циклов, то он является своим остовным деревом.

Иначе, рассмотрим в графе G цикл. Пусть e — ребро из этого цикла. Повторим рассуждения для графа $G - e$, который также является связным.

Т.к. на каждом шаге мы разрываем хотя бы один цикл графа G, а циклов конечное число, то через конечное число шагов мы получим дерево. Оно и есть остовное дерево графа G.

Остовные деревья

Доказательство (2-й способ). Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$.

Шаг 1. Пусть $D_1 = (V_1, \emptyset)$, где $V_1 = \{v_1\}$.

Шаг $(i+1)$ $(i < p-1)$. Пусть на шаге i построено дерево $D_i = (V_i, E_i)$, где $|V_i| = i$.

Т.к. G — связный граф, найдется хотя бы одно такое ребро $e = (u, w) \in E$, что один его конец u лежит в V_i, а другой конец w лежит в $V \setminus V_i$. Тогда пусть $D_{i+1} = (V_i \cup \{w\}, E_i \cup e)$.

Дерево D_p — остовное для графа G.

$\square$

Число остовных деревьев

Полный граф K_n — граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины соединены ребром.

Теорема 2 (Кэли). *В помеченном полном графе K_n найдется ровно n^{n-2} остовных деревьев.*
Доказательство. Пусть $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для каждого остовного дерева $D = D_1$ графа K_n построим его код $k(D_1) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$.

Пусть i_1 — висячая вершина с наименьшей пометкой в дереве D_1. Она смежна с единственной вершиной j_1.

Повторим рассуждения для дерева $D_2 = D_1 - i_1$ в помеченном полном графе $K_n - i_1$ и т.д.

Останавливаемся, когда получим дерево D_{n-1}, являющееся ребром.

Число остовных деревьев

Доказательство (продолжение). Пусть получен код $k(D_1) = (j_1, \dots, j_{n-2})$.

Как по нему восстановить дерево D_1?

Заметим, что если i не содержится в коде $k(D_1)$, то i — висячая вершина дерева D.

Пусть $V_1 = V$. Выбираем наименьшее число i_1 из V_1, не содержащееся в $k(D_1)$. Соединяем вершины i_1 и j_1. Пусть $V_2 = V_1 \setminus \{i_1\}$.

Повторяем рассуждения для множества V_2 и кода $(j_2, \dots, j_{n-2})$.

Заметим, что множество V_{n-1} содержит ровно две вершины. Их нужно соединить ребром. Получим дерево D_1.

Число остовных деревьев

Доказательство (продолжение). Значит, число остовных деревьев в графе K_n совпадает с числом кодов $(j_1, \ldots, j_{n-2})$, где $j_1, \ldots, j_{n-2} \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Т.е. число остовных деревьев равно n^{n-2}.

$\square$

Число висячих вершин

Сколько висячих вершин может быть в остовном дереве графа G?

Предложение 8. *Для каждого связного графа G можно построить остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.*

Доказательство. Построим остовное дерево так: сначала выберем вершину $v \in V$ с $d_G(v) = \Delta(G)$ вместе со всеми исходящими из нее ребрами.

Затем добавим к этой звезде ребра графа G так, чтобы не появились циклы. В итоге получим остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.

$\square$

Оценка числа висячих вершин

Теорема 3. *В связном графе $G = (V, E)$ с $\delta(G) \geq 3$ найдется остовное дерево, в котором не менее $|V|/4$ висячих вершин.*
Доказательство. Опишем алгоритм построения такого остовного дерева.

Пусть дерево D — подграф графа G. Висячую вершину дерева D назовем **устойчивой**, если все смежные с ней вершины принадлежат также дереву D.

Пусть $v(D)$ — число вершин, $u(D)$ — число висячих вершин и $s(D)$ — число устойчивых висячих вершин дерева D.

Положим $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение).
Остовное дерево будем строить по индукции.

Базис индукции: выберем в графе G произвольную вершину v. Пусть дерево D_1 состоит из вершины v вместе со всеми исходящими из нее ребрами и их вторыми концами.

Тогда, т.к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$ и $d_G(v) \geq 3$, верно

$$\alpha(D_1) \geq 3d_G(v)/4 - (d_G(v) + 1)/4 \geq 1/2.$$

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). Пусть уже построено дерево D_i, и $W = V \setminus V(D_i)$.

1. Если в дереве D_i есть невисячая вершина v, смежная с некоторой вершиной $w \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$.

Тогда, т.к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq 3/4 - 1/4 = 1/2.$$

Оценка числа висячих вершин

2. Иначе, если в дереве D_i есть вершина v, смежная с хотя бы с двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w_1) + (v, w_2)$.

Тогда, т.к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq 3/4 - 2 \cdot (1/4) = 1/4.$$

Оценка числа висячих вершин

3. Иначе, если в множестве W есть вершина w, смежная с какой-то вершиной v дерева D_i и хотя бы двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w) + (w, w_1) + (w, w_2)$.

Тогда, т.к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq 3/4 - 3 \cdot (1/4) = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

4. Иначе, в множестве W есть вершина w, смежная с вершинами дерева D_i. Т.к. п. 3 не выполняется, то вершина w смежна не более, чем с одной вершиной из множества W. Но $d_G(v) \geq 3$, поэтому вершина w смежна хотя бы с двумя вершинами $v, v_1 \in V(D_i)$. Пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$. Т.к. п.п. 1–2 не выполняются, вершина v_1 — висячая в дереве D_i и смежна рово с одной вершиной из множества W, а именно, с вершиной w. Поэтому в дереве D_{i+1} висячая вершина v_1 — устойчивая.

Тогда, т.к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geq 1/4 - 1/4 = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

5. Если п.п. 1–4 неприменимы, то остовное дерево D построено.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). В остовном дереве D все висячие вершины устойчивые.

Поэтому, т.к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D) = u(D) - v(D)/4.$$

Или

$$u(D) = v(G)/4 + \alpha(D).$$

Но $\alpha(D) \geq \alpha(D_1) \geq 1/2$, т.к. на каждом шаге построения мы только увеличивали этот параметр.
Отсюда получаем, что

$$u(D) \geq |V|/4.$$

□

Задачи

1. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ (без петель к кратных ребер), если:

1) $|V| = 4$;
2) $|V| = 5$ и G — несвязный граф без изолированных вершин;
3) $|V| = 6$, $|E| = 7$ и в G ровно 2 висячие вершины;
4) $|V| = 6$, $|E| = 12$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

2. Найти число неизоморфных деревьев $D = (V, E)$, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 висячие вершины;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 висячие вершины.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

3. Найти число неизоморфных корневых деревьев $(D; v_0)$, $D = (V, E)$, $v_0 \in V$, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 листа;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 листа.

Изобразить эти неизоморфные корневые деревья.

4. Найти число неизоморфных остовных
а) деревьев; б) корневых деревьев в графе G, если:

1) $G = K_3$;
2) $G = K_4$;
3) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
4) $G = K_{2,3}$.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

5. В дереве D ровно 156 вершин степени 4, остальные вершины — степени 1 или 2. Найти число вершин степени 1 в дереве D.

6. Связный граф G содержит 295 концевых вершин, остальные его вершины имеют степень 2 или 3. Кроме того, в графе G ровно один цикл. Найти число вершин степени 3 в графе G.

7. Сформулировать определение изоморфизма для псевдографов.

8. Верны ли предложения 1–4

1) для мультиграфов;
2) для псевдографов?

Если верны, то обосновать; если не верны, то указать, как надо изменить формулировки, чтобы они стали верными.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 9–11, 17, 22–25, 26–27, 53–55.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 22–28, 48–51.

Конец лекции